МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Н.Э. БАУМАНА

**Учебное пособие**

Курс лекций

# «Техническая механика»

**МГТУ имени Н.Э. Баумана**

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Н.Э. БАУМАНА

Курс лекций

# «Техническая механика»

Москва
**МГТУ имени Н.Э. Баумана**

**2012**

УДК 681.3.06(075.8)
ББК 32.973-018
И201

Курс лекций «Техническая механика» / Коллектив авторов –
М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 85 с.: ил.

В курсе лекций рассмотрены основные этапы курса «Техническая механика».

Ил. 39. Табл. 5. Библиогр. 7 назв.

УДК 681.3.06(075.8)

## АННОТАЦИЯ

В курсе лекций будут рассмотрены основные темы курса «Техническая механика» такие как: понятие скорости, как производной от пути, понятие ускорения. Как производной от ускорения по времени. Угловые скорости вращающихся тел и взаимодействие тел, имеющих поступательные и угловые скорости. Законы, описывающие системы взаимодействующих тел с двумя и более степенями свободы, законы движения пружин и взаимодействия пружин с телами, движение которых описывается линейными уравнениями.

## ANNOTATION

The course of lectures addressed the main themes of the course "Engineering mechanics" such as the concept of velocity, as derived from the way the concept of acceleration. As a derivative of acceleration with respect to time. Angular velocity of rotating bodies and the interaction of bodies with translational and angular velocity. The laws that describe the system of interacting bodies with two or more degrees of freedom, the laws of motion of the springs and the springs of interaction with the bodies whose motion is described by linear equations.

СОДЕРЖАНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Данный конспект лекций составлен на основе лекционного курса, читаемого в МГТУ им. Н.Э. Баумана на кафедре иу4 преподавателем Бондаренко Н. И. Курс лекций рекомендован к выполнению текущих аттестационных мероприятий и подготовки к экзамену по предмету «Техническая механика».

# 1 ЛЕКЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО КУРСУ ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

1.06. В динамике изуч. механ. движ. матер. объектов под действием сил.

Материальн. точка – размером пренебрег, но

Сила – мера механич. взаимод. тел

Движ. тел происходит в простр. с течением времени, задаётся система координат

В классич. мех. пространство и время не зависят друг от друга, время универсально (одинаково для всех пространств)

В основу клас. механики положены идеи Ньютона, изложенные в книге „Математ. начала натуральной философии", 1687 г.

Ньютон считал, что ∃ некая неподв. система отсчёта (гелиоцентрич., инерциальная): начало отсчёта – в центре Солнца, 3 оси направлены на ∞-но удалённые звезды.

Ньютон рассматривал изолиров. точку

## Аксиомы динамики.

I. „Закон инерции Галилея":

материальная точка, на которую не действ. силы, или действ. равновесная система сил, обладает способн. сохранять состояние покоя или прямолин. равномерн. движения относит. инерциальной системы.

Точка, на которую не действ. силы – изолиров. мат. точка

– Изолиров. мат. точка движется по инерци…

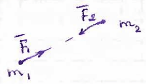
II. „Основной закон динамики".

Ускорение мат. точки относит. инерциальной сист. отсчёта пропорц. прилож. к т. силе и направлено по этой силе.

$$\boxed{m\bar{a} = \bar{F}.}$$

III. „Закон о равенстве сил действия и противод."

Силы взаимод. 2х матер. т. = по величине и противоположны по направлению.




$$\bar{F}_1 = -\bar{F}_2$$

Закон справедлив для ∀ расстояний и при изменении одной силы, другая изменяется мгновенно

IV. „Закон независимого действия сил" („Закон суперпозиции сил")

При одновременном действии на мат. т. нескольких сил, полное ускор. т. = векторной Σ ускорений от действия этих сил.

$$\bar{a} = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i$$

$$+\begin{cases} m\bar{a}_1 = \bar{F}_1 \\ m\bar{a}_2 = \bar{F}_2 \\ \dots\dots \\ m\bar{a}_n = \bar{F}_n \end{cases} \Rightarrow m \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i}_{\bar{a}} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i$$

$$\boxed{m\bar{a} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i}$$

СИ $1 \frac{кг \cdot м}{с^2} = 1 Н$; кг, м, с.

Техн. 1 кгс (кг сил), м, с

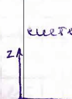
$$1 \frac{кгс \cdot с^2}{м} = 1 \text{ т.масса}$$

1 кгс ≐ 9,81 Н

1 Н ≐ 0,102 кгс

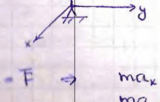
## Дифференциальное уравнение движения точки.

Векторный способ:




$$m \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F}$$

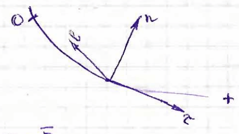
Декартовая система координат:




$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$
$$z = z(t)$$

$$m\bar{a} = \bar{F} \Rightarrow \begin{matrix} ma_x = F_x \\ ma_y = F_y \\ ma_z = F_z \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{matrix}$$

Естественный способ задания движ. точки:




$$m\bar{a} = \bar{F}$$
$$\Downarrow$$
$$ma_\tau = F_\tau, \quad m\frac{dv}{dt} = F_\tau$$
$$ma_n = F_n, \quad m\frac{v^2}{\rho} = F_n$$
$$ma_b = F_b, \quad a_b = 0, \quad 0 = F_b.$$

## Основные задачи динамики материальной точки.

1 Задача: зная массу т. и её закон движения, найти действующую на т. силу.

$m$, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$,

$m\bar{a} = \bar{F}$, если сил несколько, то $\bar{F}$ – геометрич. Σ, т.е. равнодейств.

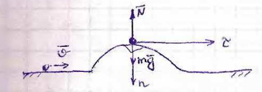
$$ma_x = \underline{m\ddot{x} = F_x}$$
$$ma_y = \underline{m\ddot{y} = F_y}$$
$$ma_z = \underline{m\ddot{z} = F_z}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}.$$

$$\cos(\bar{F}, x) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos(\bar{F}, z) = \frac{F_z}{F}.$$
$$\cos(\bar{F}, y) = \frac{F_y}{F},$$

Первая задача решается однозначно.

Пример:



$m = 1000$ кг

$\vartheta = const = 10$ м/с

Определить вес автомобиля в момент прохожд. высшей точки моста. ($P$ - ?)

$\rho = 50$ м.

Естественный способ задания движения.

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{N}$$

$$n)\ ma_n = mg - N$$

$$a_n = \frac{\vartheta^2}{\rho} \Rightarrow N = mg - \frac{m\vartheta^2}{\rho} = mg\left(1 - \frac{\vartheta^2}{\rho g}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\vartheta^2}{\rho g} = [g \approx 10] = \frac{100}{50 \cdot 10} = 0{,}2.$$

$$N = mg \cdot 0{,}8.$$

При какой $\vartheta$ не касается:

$$\vartheta = \sqrt{\rho g} = 22{,}36\ \frac{м}{с}.$$

2 Задача: по заданной массе и действующей на точку силе определить закон движения точки.

$$\bar{F} = \bar{F}(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

$$m\ddot{x} = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

$$m\ddot{y} = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

$$m\ddot{z} = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

Решение: $x = x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$

$y = y(t, C_1, \ldots, C_6)$

$z = z(t, C_1, \ldots, C_6)$.

Вторая задача решается неоднозначно.

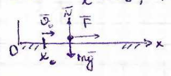
Нужно знать: $t = 0$ $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$.

$\dot{x} = \vartheta_{0x}$, $\dot{y} = \vartheta_{0y}$, $\dot{z} = \vartheta_{0z}$.

Начальные условия. (от них зависит решение).

Пример: $m$, прямолинейное движение под действием силы: $F = F_0 \cos\omega t$; $F_0 = const > 0$, $\omega = const > 0$, (без трения)

$t = 0$ $x = x_0$, $\dot{x} = \vartheta_0$. $x = x(t)$ - ?



уравнение движения: $m\bar{a} = \bar{F} + m\bar{g} + \bar{N}$. $\Rightarrow$

$$ma_x = m\ddot{x} = F = F_0 \cos\omega t$$

$$\ddot{x} = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{F_0}{m}\cos\omega t; \quad d\vartheta = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \cdot dt.$$

$$\vartheta = \frac{F_0}{m\omega}\sin\omega t + C_1$$

$$t = 0 \quad \dot{x} = \vartheta = \vartheta_0 \Rightarrow C_1 = \vartheta_0.$$

$$\frac{dx}{dt} = \vartheta_0 + \frac{F_0}{m\omega}\sin\omega t; \quad dx = \left(\vartheta_0 + \frac{F_0}{m\omega}\sin\omega t\right)dt$$

$$x = \vartheta_0 \cdot t - \frac{F_0}{m\omega^2}\cos\omega t + C_2.$$

$$t = 0 \quad x = x_0 \Rightarrow x_0 = C_2 - \frac{F_0}{m\omega^2} \Rightarrow$$

$$C_2 = x_0 + \frac{F_0}{m\omega^2}.$$

$$x = x_0 + \vartheta_0 t + \frac{F_0}{m\omega^2}(1 - \cos\omega t).$$

## Динамика несвободной материальной точки.

При решении 1ой задачи в общем случае, действующ. на т. равнодейств. сила определяется из уравн. её движ., она включает в себя: заданные силы и силы реакц. опоры. Из этой равнод. силы по заданным связям выдел.
Затем полную силу реакции связи разлагают на ~~силы~~ ~~реакц~~ 2
та составл., котор. уравновеш. задан. силы - статич; другая составл. силы реакции связи, завис. от движ. точки - динамич. составл. реакции связи. Она уравновеш. силы инерции т.

2ая задача в этом случае:
по заданным силам, нач. условиям и связям, налож. на точку, определ. движ. этой точки и сил реакции связей.

Пусть т. движ. по пов-сти: $f(x, y, z) = 0$, без трения. на неё действ. силы с равнодействующей $\bar{F}$

$$m\ddot{x} = F_x + N_x;$$ реакции связи

$$m\ddot{y} = F_y + N_y;$$

$$m\ddot{z} = F_z + N_z;$$

$$N_x = N \cdot \cos(\bar{N}, x) = N\frac{1}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}, \text{ где}$$

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

$$N_y = N \cdot \cos(\bar{N}, y) = N \cdot \frac{1}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$N_z = N \cdot \cos(\bar{N}, z) = N \cdot \frac{1}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial z}.$$

$\lambda = \frac{N}{\Delta f}$ - множитель Лагранжа. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} \\ m\ddot{y} &= F_y + \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \\ m\ddot{z} &= F_z + \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \\ f(x, y, z) &= 0 \end{aligned}\right\}$$ уравнения Лагранжа I рода.

$x, y, z, \lambda$.

$\lambda \to N$

Если точка без трения движется по пов-сти.

Движение т. по гладкой кривой линии.

Линия представляется как линия п-ния 2х плоскостей:

$f_1(x, y, z) = 0$; $f_2(x, y, z) = 0$;

реакции поверхностей: $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$

$$\bar{N} = \bar{N}_1 + \bar{N}_2.$$

$$m\ddot{x} = F_x + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x}$$ (по аналогии с пред)

$$m\ddot{y} = F_y + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y}$$

$$m\ddot{z} = F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}.$$

$$\lambda_1 = \frac{N_1}{\Delta f_1}; \quad \lambda_2 = \frac{N_2}{\Delta f_2}.$$

$$\Delta f_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)^2}$$

$$\Delta f_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)^2}$$

$x, y, z, \lambda_1, \lambda_2.$ (3 ур. + 2 ур. плоскостей)

$\lambda_1, \lambda_2 \Rightarrow N_1, N_2.$

Дифференциальное ур-ние относительного движ. материальной т.

Рассмотрим движ. точки в системе отсчёта, движущ. относит. инерциал. с.о

По II аксиоме:

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{N}$$

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_k$$

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{N} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k \quad (1)$$

$\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e$ ; $\bar{\Phi}_k = -m\bar{a}_k$

переносная сила инерции

сила инерции Кориолиса.

(1) - динамическая теорема Кориолиса в

или

Динамич. теорема Кориолиса:

Мат. т движ. относит. неинерц. с.о. также как относит. инерциаль, только к прилож. активным (задан.) силам и реакциям связей следует добавить переносную и Кориолисову силы инерции

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{N} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k$$

$\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e$ ; $\bar{\Phi}_k = -m\bar{a}_k$, где $\bar{a}_k = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r)$

В декартовой системе координат:

Oxyz - подвижная (неинерциальная с.о.)

$$m\ddot{x} = F_x + N_x + \Phi_{ex} + \Phi_{kx}$$
$$m\ddot{y} = F_y + N_y + \Phi_{ey} + \Phi_{ky}$$
$$m\ddot{z} = F_z + N_z + \Phi_{ez} + \Phi_{kz}$$

Частные случаи (записи динамич. теоремы Кориолиса):

1) Случай относительного движения по инерции

Если мат. т. движется относит. подвижн. с.о. прямолинейно и равномерно, то это относительное движение по инерции.

$\bar{v}_r = \text{const}$; $\Rightarrow \bar{a}_r = 0.$

Ур-ние относит. движ. по инерции:

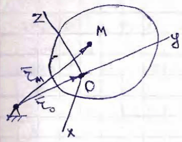
$$0 = \bar{F} + \bar{N} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k$$

2) Случай относительного равновесия (покоя)

$\bar{v}_r = 0$ ; $\bar{a}_r = 0$ ; $\bar{a}_k = 0$ ; $\Phi_k = 0.$

уравнение: $0 = \bar{F} + \bar{N} + \bar{\Phi}_e$

3) Случай инерциальной системы отсчёта.




$$\bar{a}_e = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon}_e \times \bar{r}_M + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{r}_M)$$

Пусть подвижная с.о. движется относит. инерциальной (неподв.) поступат., равномерно и прямолинейно. $\omega_e = 0, \varepsilon_e = 0$ $a_0 = 0$

$\omega_e = 0$; $\varepsilon_e = 0$; $a_0 = 0$;

$a_e = 0$; $a_k = 0$; $\Phi_e = 0$ и $\Phi_k = 0$.

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{N}$$

$ma =$

Если система движется

Все подвижные с.о., движущиеся относит. инерциальной с.о., поступат, равномерно и прямолинейно, являются также инерц

Принцип относительности Галилея - Ньютона:

- Все механич. процессы в различных инерциальных с.о протекают одинаково

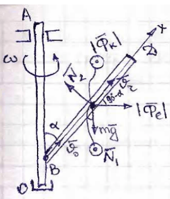
Принцип относительности Эйнштейна:

- Все физич. процессы во всех инерциальных с.о. протекают одинаково.

Физич. = механ. + эл-магн.

примеры

①




m, BD $= l$; $\omega = \text{const}$; найти $v_r$ в момент вылета.

Выбираем подвижную систему координат. (по условию) Нужно определить $v_r(x)$ - ?

Точка в промежуточный момент; рассмотреть силы. Компр. $\Sigma$ $\bar{N}_2$ и $\bar{N}_1$ даёт равнодейств ($\bar{N}$), действ. в плоскости, 1-ной BD.

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{N} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k \quad (1)$$

$a_e = \omega^2 x \sin\alpha$

$\Phi_e = -m\bar{a}_e$, $\Phi_e = m\omega^2 x \sin\alpha$

$\bar{a}_k = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r)$

$\Phi_k = m 2\omega v_r \sin\alpha$

(1) в проекции на ось x:

$$m\frac{dv_r}{dt} = |\bar{\Phi}_e| \sin\alpha - mg\cos\alpha$$

$$\cancel{m}\frac{dv_r}{dt} = \cancel{m}\omega^2 x \sin^2\alpha - \cancel{m}g\cos\alpha.$$

$v_r(x)$ - ?

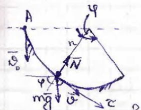
$$\frac{dv_r}{dt} = \frac{dv_r}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = v_r ; \quad \frac{v_r\, dv_r}{dx}$$

$$\int_{v_0}^{v} v_r\, dv_r = \int_0^l (\omega^2 x \sin^2\alpha - g\cos\alpha)\, dx$$

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2} = \omega^2 \frac{l^2}{2} \sin^2\alpha - gl\cos\alpha$$

$\vartheta_r = \sqrt{\vartheta_0^2 + \omega^2 \ell^2 \sin^2\alpha - 2g\ell\cos\alpha}$
(относительная скорость в конце пути)

(2)




$m, r, \bar{\vartheta}_0, \varphi = \frac{2}{3}\pi, \quad \vartheta - ?$

по неподвижн. поверх. ⇒ используем ур-ние динамики в инерциал. с.о. (?)
в произв. момент времени - обозначь силы

$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{N}$

Естественный способ задан. движ. точки:
$S = r\varphi$

естеств. трёхгранник вводим.

$\tau: \quad ma_\tau = m\frac{d\vartheta}{dt} = mg\cos\varphi,$

$\vartheta = \vartheta(\varphi) \Rightarrow$ избавляемся от времени:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt}\frac{r\,d\varphi}{r\,d\varphi} = \frac{\vartheta\,d\vartheta}{r\,d\varphi}$$

$$\frac{\vartheta\,d\vartheta}{r\,d\varphi} = g\cos\varphi$$

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \vartheta\,d\vartheta = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} rg\cos\varphi\,d\varphi$$

$$\frac{\vartheta_1^2 - \vartheta_0^2}{2} = rg\underbrace{\sin\frac{2\pi}{3}}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow$$

$$\vartheta_1 = \sqrt{\vartheta_0^2 + rg\sqrt{3}}.$$

Общие теоремы динамики.

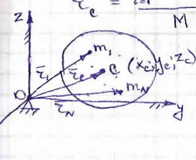
Механич. система матер. точек - ∀ совокупность взаимодействующих между собой мат. точек.
Если расстояние между ними не меняется, то система - неизменяемая.
Граница механ. системы определяется исполнителем задачи.

Движение механ. системы зависит от распределения массы в системе.

$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ ; $N$ - число точек в системе; $M$ - масса системы.

Центр масс системы - геометрическая точка, радиус-вектор которой $(\bar{r}_c)$:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \bar{r}_i}{M}$$




$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{M}$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{M}$$

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{M}$$

Статический момент массы относительно центра O:

$$\bar{S}_0 = \sum_{i=1}^{N} m_i \bar{r}_i$$

Статический момент массы относительно плоскости $Oyz$: $S_{Oyz} = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i$

$\sum_{i=1}^{N} m_i y_i = S_{Oxz}$ и $\sum_{i=1}^{N} m_i z_i = S_{Oxy}$.
относит пл. $Oxz$ и пл. $Oxy$

$$x_c = \frac{S_{Oyz}}{M}; \quad y_c = \frac{S_{Oxz}}{M}; \quad z_c = \frac{S_{Oxy}}{M}$$

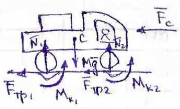
В динамике силы делят на внутренние и внешние

Внешние - силы, приложенные к точкам системы со стороны точек или тел, не входящих в систему.

$\bar{F}^{(e)}$ - внешние сила

Внутренние - силы взаимодействия м/у точками рассматриваемой механической системы.

$\bar{F}^{(i)}$ - внутренние силы.



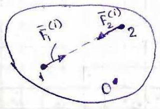

$\bar{F}_c$ (сопротив. воздуха)

$\bar{F}^{(e)}\ (M\bar{g}, \bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{F}_{тр1}, \bar{F}_{тр2}, \bar{M}_{к1}, \bar{M}_{к2}, \bar{F}_c)$.

Внутренние силы ∃ попарно.

Св-ва внутренних сил системы:

1°. ~~Что~~ Главный вектор внутренних сил системы равен 0: $\bar{R}^{(i)} = 0$.




$\bar{F}_1^{(i)} = -\bar{F}_2^{(i)}$

$\bar{F}_1^{(i)} + \bar{F}_2^{(i)} = 0.$

. . . . . . . . . . .

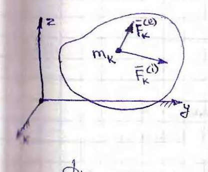
$\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k^{(i)} = 0 = \bar{R}^{(i)}$ - главный вектор внутренних сил.

2°. Главный момент внутренних сил механич. системы относительно произвольной т. равен 0:

$\bar{M}_0(\bar{F}_1^{(i)}) + \bar{M}_0(\bar{F}_2^{(i)}) = 0$

. . . . . . . . . . .

$\sum_{k=1}^{N} \bar{M}_0(\bar{F}_k^{(i)}) = 0 = \bar{L}_0^{(i)}$ - главный момент.




Ур-ние движения:

$$\left.\begin{aligned} m_k \frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2} &= \bar{F}_k^{(e)} + \bar{F}_k^{(i)} \\ &\dots\dots\dots\dots, \\ m_N \frac{d^2\bar{r}_N}{dt^2} &= \bar{F}_N^{(e)} + \bar{F}_k^{(i)} \end{aligned}\right\} \quad k = \overline{1, N}$$

Дифференциальные ур-ние движения мат. точек

В проекциях на оси - 3N уравнений ⇒ не решаемо.

Количество движения точки и системы

$m\bar{\vartheta} = \bar{q}$ - количество движения
принадлежит к точке, направление - по $\bar{\vartheta}$

$\text{H}\ \left(\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}} \cdot \frac{\text{с}}{\text{с}}\right) = \text{H}\cdot\text{с}$

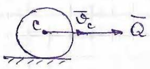
$\bar{Q} = \sum_{i=1}^{N} m_i \bar{\vartheta}_i$ - не имеет точки приложения
для механ. системы колич. движения

$$\bar{Q} = \sum_{i=1}^{N} m_i \bar{\vartheta}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \bar{r}_i\right)\frac{M}{M} =$$

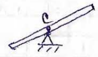

$$= M\frac{d}{dt}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \bar r_i}{M}\right) =$$

$$= M\frac{d\bar r_c}{dt} = M\cdot\underset{\text{скорость центра масс}}{\underbrace{\bar\vartheta_c}}$$

Пример:




$\bar Q = M\bar\vartheta_c$




$\vartheta_c = 0$
$Q = 0.$ (у стержня т. C – середина)

Элементарный и полный импульс силы.

$\bar F\cdot dt$ – элементарный импульс.

$\bar S = \int\limits_0^t \bar F\cdot dt$ – полный импульс

$S_x = \int\limits_0^t F_x\,dt$; $S_y = \int\limits_0^t F_y\,dt$; $S_z = \int\limits_0^t F_z\cdot dt$.

Теорема об изменении количества движения.

Для точки:

$m\bar a = \bar F$ (в инерциальной с.о)

$\bar a = \frac{d\bar\vartheta}{dt}$; $m = const.$

$\frac{d}{dt}(m\bar\vartheta) = \bar F.$ $m\bar\vartheta = \bar q$.

$\frac{d\bar q}{dt} = \bar F$ – математич. запись теоремы об измен. кол-ва движ. точки в дифференциальной форме:
– 1ая производная по t от кол-ва движения точки, равна действующей на точку силе.

Другие формы записи:

1) $\underbrace{d\bar q = \bar F dt}$

теорема импульсов в диф. форме записи:
– дифференциал от кол-ва движения т. ⊜ элемент. импульсу силы, действующей на точку.

2) $\int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta} d(m\bar\vartheta) = \int\limits_0^t \bar F dt$

3) $m\bar\vartheta - m\bar\vartheta_0 = \bar S = \int\limits_0^t \bar F\,dt.$

теорема импульсов в конечной (интегральной) форме записи:
– изменение кол-ва движ. т. за какой-л. промежуток t ⊜ полному импульсу силы, действ. на т., за тот же промежуток времени

Чтобы получить скалярные выражения, проецируем на оси. (Oxyz).

Теорема об изменении кол-ва движения системы.

N материальных точек; $(N\to\infty)$.

Для k-ой точки механич. системы.

$$\frac{d(m_k\bar\vartheta_k)}{dt} = \underset{\text{внешние силы}}{\bar F_k^{(e)}} + \underset{\text{равнодейств. внутр. сил, прилож. к k-ой точке}}{\bar F_k^{(i)}},\ k = \overline{1,n}.$$

складываем N уравнений:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{N} m_k\bar\vartheta_k\right)}_{\bar Q} = \sum_{k=1}^{N}\bar F_k^{(e)} + \underset{\text{главный вектор системы}}{\sum_{k=1}^{N}\bar F_k^{(i)}} = 0$$

Для мех. системы теорема об изменении кол-ва движения в дифференц. форме:

$$\frac{d\bar Q}{dt} = \sum_{k=1}^{N}\bar F_k^{(e)}.$$

производная по t от кол-ва движ. сис-мы ⊜ векторной Σ всех внешних сил, действующих на систему

Теорема импульсов для мех. системы в диф. форме:

$$d\bar Q = \sum_{k=1}^{N}\bar F_k^{(e)}\cdot dt.$$

Дифференциал кол-ва движ. мех. сис-мы ⊜ векторной Σ элемент. импульсов всех внешних сил, действ. на систему

$$\int\limits_{\bar Q_0}^{\bar Q} d\bar Q = \int\limits_0^t \sum_{k=1}^{N}\bar F_k^{(e)}\cdot dt$$

$$\bar Q - \bar Q_0 = \sum_{k=1}^{N}\int\limits_0^t \bar F_k^{(e)}\cdot dt = \sum_{k=1}^{N}\bar S_k^{(e)}$$

Теорема об изменении кол-ва движ. мех. сис-мы в конечной (интегральной) форме:

Изменение кол-ва движ. сис-мы за какое-л. t ⊜ векторной Σ всех импульсов внешних сил, действующих на систему (Внутренние силы не влияют на изменение кол-ва движ.).

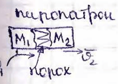
Законы сохранения кол-ва движ.

1) $\sum\limits_{k=1}^{N}\bar F_k^{(e)} = 0.$

Из $\frac{d\bar Q}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{N}\bar F_k^{(e)} = 0 \Rightarrow \boxed{\bar Q = \overline{const}}$

Если главн. вектор внешних сил сис-мы ⊜ 0, то кол-во движ. сис-мы – const по величине и направлению.

пиропатрон




$\bar Q = \overline{const} = M_1\bar\vartheta_1 + M_2\bar\vartheta_2 = 0 \Rightarrow$

$\bar\vartheta_1 = -\frac{M_2}{M_1}\bar\vartheta_2.$

части полетят по одной линии, но в разные стороны

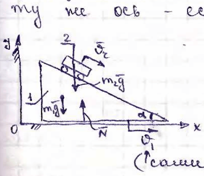
2) Пусть условие:

$\sum\limits_{k=1}^{N} F_{kx}^{(e)} = 0$ (сумма проекций на ось = 0).

$\frac{dQ_x}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{N} F_{kx}^{(e)} = 0 \Rightarrow Q_x = const.$

если проекция главн. вектора всех внешн. сил сис-мы на какую-л. ось = 0, то проекция кол-ва движ. сис-мы на ту же ось – есть const.

1




$m_1, m_2;\ \alpha;\ \vartheta_2.$
Определить скорость призмы.
$(\vartheta_1 - ?)$

(сами установим напр~~ление~~авление)

Определение внешние силы
(силы, не входящие в сис-му):

$\sum F_{kx}^{(e)} = 0$ , т.к. сила $\perp Ox$.

$\Downarrow$

$Q_x = const$ , для $\forall t$.

при $t=0$ $\vartheta_i = 0$ и $\Rightarrow$ $(Q_x)_0 = 0$ - для начального момента времени $\Rightarrow$

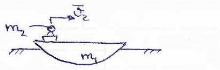
для $\forall t$ $Q_x = 0$:

$$m_1\vartheta_1 + m_2 \underbrace{(\vartheta_1 + \vartheta_2 \cos\alpha)}_{\text{абсолютная } \vartheta!} = 0;$$

$$\vartheta_1 = -\frac{m_2 \vartheta_2 \cos\alpha}{m_1 + m_2}.$$

другое направление скорости.

Теорема удобна для нахождения $\vartheta$.

② 


Теорема о движении центра масс механической системы.

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k^{(e)}$$

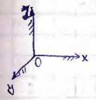
$$\bar{Q} = M\bar{\vartheta}_c$$

Рассмотрим случай, когда $M = const$

$$M\frac{d\bar{\vartheta}_c}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k^{(e)}$$

$$\boxed{M\bar{a}_c = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k^{(e)}}.$$

Центр масс системы движется так же, как и мат. т., масса которой равна массе всей сис-мы, если на эту т. действуют все внешние силы, прилож. к рассматриваемой механической системе.




$$\left.\begin{aligned} M\ddot{x}_c &= \sum_{k=1}^{N} F_{kx}^{(e)} \\ M\ddot{y}_c &= \sum_{k=1}^{N} F_{ky}^{(e)} \\ M\ddot{z}_c &= \sum_{k=1}^{N} F_{kz}^{(e)} \end{aligned}\right\}$$

Законы сохранения движения центра масс.

1) $\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k^{(e)} = 0 \Rightarrow \bar{a}_c = 0 = \frac{d\bar{\vartheta}_c}{dt}$ ; $\bar{\vartheta}_c = const$.

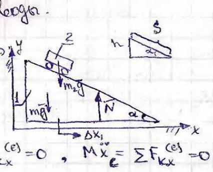
Центр масс или в покое или равн. прям.

если главный вектор всех внешних сил сис-мы $= 0$, то центр масс или в покое или движется равномерно и прямолинейно.

2) Пусть $\sum_{k=1}^{N} F_{kx}^{(e)} = 0 \Rightarrow$ $\ddot{x}_c = 0 = \frac{d\dot{x}_c}{dt}$ ; $\dot{x}_c = const$

Если проекция гл. вектора всех внешних сил сис-мы на какую-л. ось равна 0, то проекция скорости на эту ось есть const.

Внутренние силы не влияют на движение системы. Они влияют на возникновение внешних сил.
Всё, что движется на земле, летает в воздухе, плавает в воде совершает это с помощью внутр. сил, создавая силы трения на тв. поверхностях тел, отталкиваясь от воздуха или воды.

Пример: 


$m_1, m_2, h$.
определить перемещение призмы, если тележка опустится на $h$.

$\sum_k F_{kx}^{(e)} = 0$ , $M\ddot{x}_c = \sum F_{kx}^{(e)} = 0 \Rightarrow \dot{x}_c = const$,

при $t=0$, $\vartheta_i = 0$. $\Rightarrow$ для $\forall t$ $\dot{x}_c = 0 \Rightarrow$

$\underline{x_c = const}$ , если $\underline{\text{выполняются 2 условия:}}$
$\underline{\Sigma \text{вн. сил} = 0 \text{ и при } t=0,\ \vartheta_i = 0.}$ !

Вычислим $x_c$ в 2 момента времени:

$$x_c\Big|_{t=0} = \frac{m_1 x_{10} + m_2 x_{20}}{m_1 + m_2} \qquad (1)$$

тело опустилось на высоту $h$:

$$x_c\Big|_{t\neq 0} = \frac{m_1(x_{10} + \Delta x_1) + m_2(x_{20} + \Delta x_1 + S\cos\alpha)}{m_1 + m_2} \qquad (2)$$

$\Delta x_1$ - перемещение призмы.

т.к. $x_c = const$, то $(1) = (2) \Rightarrow$

$$0 = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_1 + m_2 S\cos\alpha$$

$$\Delta x_1 = -\frac{m_2 S\cos\alpha}{m_1 + m_2}.$$

если выполняются 2 условия, то
$$0 = \sum m_i \cdot \Delta x_i$$

Пользуясь теоремой о движ. центра масс сис-мы можно, зная внешние силы найти закон движ. ц.м. и наоборот, зная движ. ц.м., определить гл. вектор всех внешних сил, действующих на систему, в случаях, когда имеет место з.с. движ. ц.м.
Теорема позволяет по перемещ. той части сис-мы найти перемещение другой её части.

Дифференциальные ур-ния поступательного движ. тв. тела.

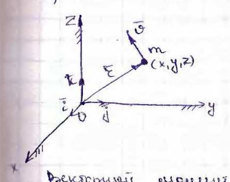
по теореме движ. ц.м.: $\underset{\text{движ.}}{M\bar{a}_c} = \underset{\text{ц.м.}}{\sum_k \bar{F}_k^{(e)}} \Rightarrow$ для $\forall$ т.

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{x} &= \sum_k F_{kx}^{(e)} \\ M\ddot{y} &= \sum_k F_{ky}^{(e)} \\ M\ddot{z} &= \sum_k F_{kz}^{(e)} \end{aligned}\right\}$$

для $\forall$ точки, т.к. при поступат. движ. все $\vartheta$ и $a$ одинаковы.

Кинетический момент т. и механич. сис-мы.

Пусть есть точка, координаты $(x, y, z)$, скорость $\bar{\vartheta}$, $m$.




$\bar{k}_0 = \bar{r} \times m\bar{\vartheta}$ - кинетич. момент точки относит. неподвижной т. O.

Векторный момент сил: $\bar{M}_0(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F} \Rightarrow$
$\bar{k}_0 = \bar{M}_0(m\bar{\vartheta})$

$$\bar{k}_0 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ m\vartheta_x & m\vartheta_y & m\vartheta_z \end{vmatrix} = \begin{aligned} &\bar{i}\, m(y\vartheta_z - z\vartheta_y) + \\ &\bar{j}\, m(z\vartheta_x - x\vartheta_z) + \\ &\bar{k}\, m(x\vartheta_y - y\vartheta_x) \end{aligned}$$

проекции кинетич. момента т. ($\bar{k}_0$) на оси:

$$\left.\begin{aligned} k_{0x} &= m(y\vartheta_z - z\vartheta_y) \\ k_{0y} &= m(z\vartheta_x - x\vartheta_z) \\ k_{0z} &= m(x\vartheta_y - y\vartheta_x). \end{aligned}\right\}$$

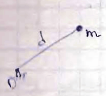
Для системы:

$$k_{ox} = \sum_{i=1}^{N} m_i (y_i \vartheta_{iz} - z_i \vartheta_{iy})$$

$$k_{oy} = \sum_{i=1}^{N} m_i (z_i \vartheta_{ix} - x_i \vartheta_{iz})$$

$$k_{oz} = \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i \vartheta_{iy} - y_i \vartheta_{ix})$$

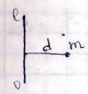
Момент инерции



$md^2$ – массовый момент инерции (относит. т. O)

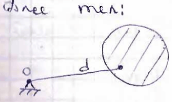
$md^2 = J_o$

момент инерции т. относит. оси:



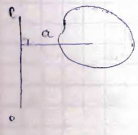
$$J_{ol} = md^2$$

Для тел:



$$J_o = \int d^2 dm$$

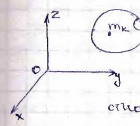
Момент инерции характеризует распределение масса в теле. (это играет большую роль во вращательном движении).



$$J_{ol} = \int$$

Радиус инерции тела относительно оси – расстояние от этой оси до такой точки, в которую следует поместить массу тела, чтобы её момент инерции оказался равным моменту инерции тела относительно рассматриваемой оси.

$J_{ol} = M \rho_{ol}^2$ ($\rho$ – радиус инерции).



$$J_o = \sum_{k=1}^{N} m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) \text{ – относит. т. } O.$$

относит. осей:

$$J_x = \sum_k m_k (y_k^2 + z_k^2),$$

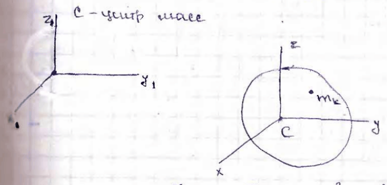
$$J_y = \sum_k m_k (x_k^2 + z_k^2)$$

$$J_z = \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2)$$

$$J_x + J_y + J_z = 2J_o.$$

Теорема о моментах инерции относит. ||-ных осей (теорема Штейнера).

C – центр масс



оси ||-ны

$$J_{oz_1} = \sum_k m_k (x_{1k}^2 + y_{1k}^2)$$

$(x_{1c}, y_{1c}, z_{1c})$ – коорд. ц. м. в $x_1 y_1 z_1$

$(x_k, y_k, z_k)$ – коорд. т. $m_k$ в $xyz$

$$x_{1k} = x_k + x_{1c}$$

$$y_{1k} = y_k + y_{1c}$$

$$z_{1k} = z_k + z_{1c}$$

$$J_{oz_1} = \sum m_k [x_k^2 + 2x_k x_{1c} + x_{1c}^2 + y_k^2 + 2y_k y_{1c} + y_{1c}^2] =$$

$$= \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) + \sum m_k (x_{1c}^2 + y_{1c}^2) =$$

$$\sum_k m_k x_k \cdot x_{1c} = x_{1c} \left( \sum m_k x_k \cdot \frac{\sum m_k}{\sum m_k} \right)$$

$\parallel$ 0 т.к. C в $xyz$ в нуле

$$\sum_k m_k y_k \cdot y_{1c} = y_{1c} \left( \sum m_k y_k \cdot \frac{\sum m_k}{\sum m_k} \right)$$

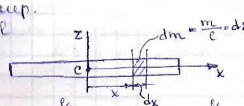
$\parallel$ 0

$$= J_{cz} + d^2 \cdot M.$$

Момент инерции сис-мы относит. какой-л. оси = моменту инерции относит. ||-ной оси, проходящей через ц. м + произведение массы системы на квадрат расстояния между этими осями.

Пример.

$m, l$

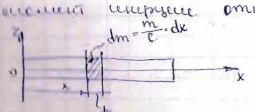


$dm = \frac{m}{l} \cdot dx$

C – середина

$$J_{cz} = 2\int_0^{l/2} x^2 \cdot dm = 2\int_0^{l/2} \frac{m}{l} x^2 dx = \frac{2m}{l} \frac{l^3}{3 \cdot 8} = \frac{ml^2}{12};$$

момент инерции относительно начала:



$dm = \frac{m}{l} \cdot dx$

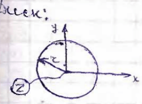
$$J_{oz_1} = \int_0^l x^2 dm = \int_0^l \frac{m}{l} \cdot x^2 \cdot dx = \frac{ml^2}{3}.$$

по т. Штейнера (проверка): $J_{oz_1} = J_{oz_1} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 =$

$$= \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}.$$

Самостоятельно (изучить моменты инерции):

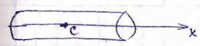
Диск:



$$J_{cx} = J_{cy} = \frac{mr^2}{4}$$

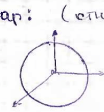
$$J_{cz} = \frac{mr^2}{2}.$$

Цилиндр:



$$J_c = \frac{mr^2}{2}.$$

Шар: (относит. $\forall$ оси, проходящей через центр).



$$J = \frac{2}{5} ml^2.$$

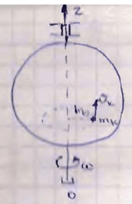
Полый шар со стенками очень малой толщины:

$$J = \frac{2}{3} mr^2$$

Куб: момент инерции, проход. через ц. м., ⊥-но плоскости:

$J = \frac{ma^2}{6}$, $a$ – квадрат стороны.

Кинетический момент тв. тела относительно неподвижной оси вращения



кинетич. момент:

$$K_z = \sum_k M_z(m_k v_k) =$$

$$= \sum h_k m_k v_k = [v_k = \omega h_k] =$$

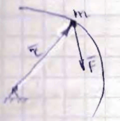
$$= \omega \underbrace{\sum_{k=1}^{N} m_k h_k^2}_{J_{oz}} = J_{oz} \cdot \omega.$$

oz – неподвижная ось.

Изучить самостоятельно:
1. Движение точки под действием центральной силы
2. Теорема площадей
3. Вычисления моментов инерции тел простейшей формы.

## Теорема об изменении кинетического момента.

Рассмотрим для одной точки.



$m\bar{a} = \bar{F}$ ; $m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}$ (векторно умножим слева на $\bar{r}$) $\bar{r}\times$

$$\bar{r} \times m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{r}\times\bar{F};$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}\times m\bar{v}) = \underbrace{\underbrace{\frac{d\bar{r}}{dt}}_{\bar{v}} \times m\bar{v}}_{0} + \bar{r}\times\frac{d}{dt}(m\bar{v})$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{(\bar{r}\times m\bar{v})}_{\bar{K}_o} = \bar{r}\times\bar{F}$$

$\bar{K}_o$ – кинетич. момент точки относит неподвижн. центра

$$\boxed{\frac{d\bar{K}_o}{dt} = \bar{M}_o(\bar{F})}$$

первая произв. по $t$ кинетич. момента т. = векторному моменту силы, вычисл. относит этой т.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dk_x}{dt} &= M_{ox}(\bar{F}), \\ \frac{dk_y}{dt} &= M_{oy}(\bar{F}), \\ \frac{dk_z}{dt} &= M_{oz}(\bar{F}) \end{aligned}\right\}$$

Рассмотрим для механич. системы.


$$\frac{d}{dt}\underbrace{(\bar{r}_k \times m_k\bar{v}_k)}_{} = \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)} + \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)}$$

$$\frac{d\bar{K}_{ok}}{dt} = \bar{M}_o(\bar{F}_k^{(e)}) + \bar{M}_o(\bar{F}_k^{(i)})$$
$k = \overline{1,n}$

сложив все ур-ния:

кинетич. момент относит. центра O для мех. сис...

$$\frac{d\bar{K}_o}{dt} = \sum \bar{M}_o(\bar{F}_k^{(e)}) + \underbrace{\sum_k \bar{M}_o(\bar{F}_k^{(i)})}_{0 \text{ (св-во)}}.$$

$$\boxed{\frac{d\bar{K}_o}{dt} = \sum_k M_o(F_k^{(e)})}$$

В проекциях на оси:

$$\begin{cases} \dfrac{dK_{ox}}{dt} = \sum_k M_{ox}(\bar{F}_k^{(e)}) \\ \dfrac{dK_{oy}}{dt} = \sum_k M_{oy}(\bar{F}_k^{(e)}) \\ \dfrac{dK_{oz}}{dt} = \sum_k M_{oz}(\bar{F}_k^{(e)}). \end{cases}$$

## Закон сохранения кинетического момента.

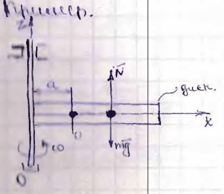
1) $\sum_k \bar{M}_o(\bar{F}_k^{(e)}) = 0$, то $\bar{K}_o = \overline{const} \Rightarrow$

$K_{ox} = C_1$; $K_{oy} = C_2$; $K_{oz} = C_3$.

2) $\sum_k M_{ox}(\bar{F}_k^{(e)}) = 0$, то $K_{ox} = const\ (= C)$.

Кинетический момент системы относительно какой-л. координ. оси – const, если $\sum$ моментов внешних сил относительно этой оси $= 0$.

Пример.




$\omega_0$ – в момент разрыва нити

теорема об измен. кинетич. момента в проекции на Oz:

$$\frac{dK_{oz}}{dt} = \sum_k M_{oz}(F_k^{(e)}) = 0$$

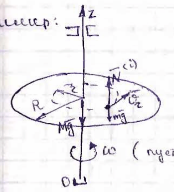
$K_{oz} = const$

$t = 0$, $\omega = \omega_0$, $K_{oz} = \cancel{mv} = \overbrace{m\omega_0 a}^{\text{кол-во движе.}} \cdot a$

$t \neq 0$, $\omega$ $K_{oz} = m\omega(a+x)^2$.

$$m\omega_0 a^2 = m\omega(a+x)^2 \Rightarrow \omega = \omega_0 \cdot \frac{a^2}{(a+x)^2}.$$

Пример:




$v_r = const$

M – масса диска

m – масса человека

1) Решаем, что включ. в мех. сис-му;
2) Определить внешние для неё силы.

при $t=0$ $v_r = 0$ (покой)

теорема об измен. кинетич. мом. в проекции на Oz:

$$\frac{dK_{oz}}{dt} = \sum M_{oz}(\bar{F}_k^{(e)}) = 0,$$

$K_{oz} = const = 0$

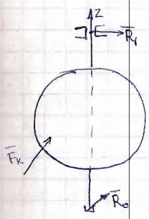
$$(J_1)_{oz} \cdot \omega + m(\omega r + v_r)r = 0$$

$$(J_1)_{oz} = \frac{1}{2}MR^2;$$

$$\omega\left(\frac{1}{2}MR^2 + mr^2\right) = -mv_r \cdot r$$

$$\omega = -\frac{mv_r \cdot r}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2}.$$

## Дифференциальное уравнение вращения тв. тела вокруг неподвижной оси.




$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_k M_z(\bar{F}_k^{(e)})$$

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^{(e)})$$

$$K_z = J_z \cdot \omega$$

$$J_z \cdot \frac{d\omega}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^{(e)})$$

$$J_z \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum M_z(\bar{F}_k^{(e)})$$

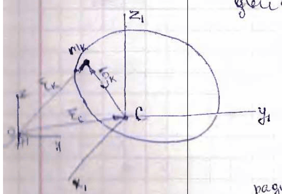
$$J_z \cdot \ddot{\varphi} = \sum M_z(\bar{F}_k^{(e)})$$ ( „+" – совпадает с направл. $\varphi$).

Если $\sum M_z(\bar{F}_k^{(e)}) = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow \omega = const.$

$\sum M_z(\bar{F}_k^{(e)}) = const \Rightarrow \ddot{\varphi} = const$

## Кинетический момент механической системы относит. неподвижного центра при её сложном движении.

т. C – центр масс




$Oz \parallel Cz_1$
$Oy \parallel Cy_1$
$Ox \parallel Cx_1$

радиус-вектор k-ой точки

$\bar{r}_k = \bar{r}_c + \bar{\rho}_k$

$$\bar{v}_k = \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{d(\bar{r}_c + \bar{\rho}_k)}{dt} =$$

$$\overset{\text{ф-ла Бура}}{=} \bar{v}_c + \frac{d\bar{\rho}_k}{dt} = \bar{v}_c + \frac{\tilde{d}\bar{\rho}_k}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{\rho}_k \Rightarrow$$

$$\bar{v}_k = \bar{v}_c + \bar{v}_{kr}$$

$$\bar{K}_0 = \sum_k (\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k) = \sum\left[(\bar{r}_c + \bar{\rho}_k) \times m_k(\bar{v}_c + \bar{v}_{kr})\right] =$$

$$= \sum(\bar{r}_c \times m_k \bar{v}_c) + \sum(\bar{\rho}_k \times m_k \bar{v}_c) + \sum(\bar{r}_c \times m_k \bar{v}_{kr}) +$$

$$+ \sum(\bar{\rho}_k \times m_k \bar{v}_{kr}) =$$

$$= \bar{r}_c \times \underset{M}{(\sum m_k)} \bar{v}_c + \underbrace{(\sum \bar{\rho}_k m_k)}_{0 \text{ коорд. ц.м.}} \times \bar{v}_c + \bar{r}_c \times \underbrace{\sum m_k \bar{v}_{kr}}_{0} + \sum(\bar{\rho}_k \times m_k \bar{v}_{kr})$$

$$\sum m_k \bar{v}_{kr} = \sum m_k \frac{\tilde{d}\bar{\rho}_k}{dt} = \frac{d}{dt}(\sum m_k \bar{\rho}_k)$$

$$= \bar{r}_c \times M\bar{v}_c + \bar{K}_c^{(r)}$$

$$\bar{K}_0 = \bar{r}_c \times M\bar{v}_c + \bar{K}_c^{(r)}$$

При сложном движ. сис-мы её кинетич. момент относит. неподв. т. O = векторн. $\sum$ кинетич. момента относит. этой т. центра масс (при условии, что в нём сосредоточ. вся масса сис-мы) и кинетич. момента сис-мы, вычислен. относит. ц.м.

## Теорема об изменении кинетич. момента сис-мы в относит. движении по отношению к ц.масс (получ. ур-ние относит. ц.м.)

относит. неподв. т.: $\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \sum_k \bar{M}_0(\bar{F}_k^{(e)})$;

$$\bar{K}_0 = \bar{r}_c \times M\bar{v}_c + \bar{K}_c^{(r)}$$

векторный момент внешн. силы относит. т. O: $\bar{M}_0(\bar{F}_k^{(e)}) = \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)} =$

$$= (\bar{r}_c + \bar{\rho}_k) \times \bar{F}_k^{(e)};$$

$$\frac{d}{dt}\{\bar{r}_c \times M\bar{v}_c + \bar{K}_c^{(r)}\} = \sum(\bar{r}_c + \bar{\rho}_k) \times \bar{F}_k^{(e)}$$

$$\underbrace{\underbrace{\frac{d\bar{r}_c}{dt}}_{\bar{v}_c} \times M\bar{v}_c}_{0} + \bar{r}_c \times M\frac{d\bar{v}_c}{dt} + \frac{d\bar{K}_c^{(r)}}{dt} = \sum_k \bar{r}_c \times \bar{F}_k^{(e)} + \sum_k \bar{\rho}_k \times \bar{F}_k^{(e)}$$

$$\bar{r}_c \times \underbrace{\left(M\frac{d\bar{v}_c}{dt} - \sum_k \bar{F}_k^{(e)}\right)}_{0} + \frac{d\bar{K}_c^{(r)}}{dt} = \sum_k \bar{\rho}_k \times \bar{F}_k^{(e)}$$

(по т. о движ. ц.м.)

по определению

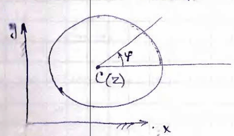
$$\frac{d\bar{K}_c^{(r)}}{dt} = \sum \bar{M}_c(\bar{F}_k^{(e)}) = \bar{L}_c^{(e)}$$ ← относит. подвижного ц.м.

скалярные ур-ния

$\frac{dK_{cx}^{(r)}}{dt} = L_{cx}^{(e)}$, x – ось, проход. через ц.м.

аналогично на другие оси.

## Дифференц. ур-ние плоского движ-я тв. тела




по т. о движ. ц.м.:

$$M\bar{a}_c = \sum_k \bar{F}_k^{(e)}$$

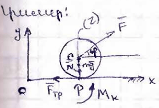
| | |
|---|---|
| $Ma_{cx} = \sum_k F_{kx}^{(e)}$ | $M\ddot{x}_c = \sum F_{kx}^{(e)}$ (1) |
| $Ma_{cy} = \sum_k F_{ky}^{(e)}$ | $M\ddot{y}_c = \sum F_{ky}^{(e)}$ (2) |

по т. предыдущей: $\frac{d\bar{K}_c^{(r)}}{dt} = \sum_k \bar{M}_c(\bar{F}_k^{(e)})$; в проекции ⇒

$$\frac{dK_{cz}^{(r)}}{dt} = \sum M_{cz}(\bar{F}_k^{(e)}); \quad K_{cz}^{(r)} = J_{cz} \cdot \omega = J_{cz} \cdot \dot{\varphi}$$

$$J_{cz}\ddot{\varphi} = \sum_k M_{cz}(\bar{F}_k^{(e)}) \quad (3).$$

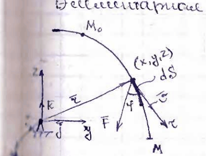
Пример: записать ур-ния движ.




$$\begin{cases} M\ddot{x}_c = F\cos\alpha - F_{тр} \\ M\ddot{y}_c = F\sin\alpha - mg + N \\ J_{cz}\ddot{\varphi} = M_k - F_{тр} \cdot r \end{cases}$$

## Элементарная работа силы

за $dt$, $dS$




dA – элементарная работа – произведение проекции силы на касательную и dS;

$$dA = F_\tau \cdot dS.$$

С другой стороны: $v = \frac{dS}{dt}$; $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$;

$F_\tau = F\cos\varphi \Rightarrow$

$dA = \underbrace{F\cos\varphi\,\vartheta}\,dt = (\bar F, \bar\vartheta)\,dt = \bar F \cdot d\bar r.$

$\bar F = F_x \cdot \bar i + F_y \cdot \bar j + F_z \cdot \bar k;$

$d\bar r = \bar i\,dx + \bar j\,dy + \bar k\,dz.$

$dA = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z\,dz.$

$$\boxed{dA = F_\tau\,dS = \bar F \bar\vartheta\,dt = \bar F\,d\bar r = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz.}$$

элементарная работа силы

Полная работа силы.

$M_0 M$ разбивают на $n$ участков от $M_0$ до $M$.

Полная работа: $A = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} dA_k = \int\limits_{M_0}^{M} \bar F \cdot d\bar r =$

$= \int\limits_0^{t_1} \bar F \bar\vartheta\,dt.$

1 Н·м = 1 Дж.

Если сила - равнодействующая некоторой сис-мы сил, то её $A$ на каком-л. перемещ. = алгебраич. $\Sigma$ работ составляющих сил на этом перемещении.

Работа силы, приложенной к тв. телу

1) поступат. движение:

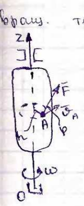
$dA(\bar F) = \bar F \cdot \bar\vartheta_A \cdot dt$

$A$ - точка прилож. силы;

$dA(\bar F) = \underbrace{\bar F \cdot \bar\vartheta}\,\cdot dt = \bar F \cdot d\bar r,$

$r$ - радиус-вектор $\forall$ т.

2) вращ. тело вокруг неподвижной оси $Oz$:




$dA(\bar F) = \bar F \cdot \bar\vartheta_A \cdot dt =$

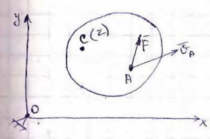
$= F \cdot \vartheta_A \cdot \cos(\bar F, \bar\vartheta_A)\,dt$

$\vartheta_A = \omega \cdot h;$

$dA = \underbrace{F h \cos\varphi}_{M_{Oz}(\bar F)}\,\underbrace{\omega\,dt}_{d\varphi}$ $d\varphi$ - элементарный угол поворота

$dA(\bar F) = M_{Oz}(\bar F)\,d\varphi$

3) плоское движение




C - ц.м.

$dA(\bar F) = \bar F \cdot \bar\vartheta_A\,dt$

$\bar\vartheta_A = \bar\vartheta_c + \bar\vartheta_{Ac};$

$dA(\bar F) = \bar F(\bar\vartheta_c + \bar\vartheta_{Ac})\,dt =$

$= \underbrace{\bar F \bar\vartheta_c\,dt} + \bar F \bar\vartheta_{Ac}\,dt$

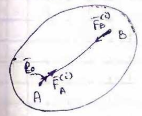
$\bar F \bar\vartheta_{Ac}\,dt = F \cdot \vartheta_{Ac} \cos(\bar F, \hat{\ } \bar\vartheta_{Ac})\,dt = F \cdot \omega \cdot AC \cdot \cos(\bar F, \hat{\ } \bar\vartheta_{Ac})\,dt =$

$= \underbrace{F\cos(\bar F, \hat{\ } \bar\vartheta_{Ac})\,AC}_{M_{cz}(\bar F)}\,\underbrace{\omega\,dt}_{d\varphi}$

$\bar F \bar\vartheta_c\,dt = \bar F\,d\bar r_c \Rightarrow$

$dA(\bar F) = \bar F \cdot d\bar r + M_{cz}(\bar F)\,d\varphi$

Работа внутренних сил тв. тела.




$\bar F_A^{(i)} = -\bar F_B^{(i)}$

$\{dA(\bar F_A^{(i)}) + dA(\bar F_B^{(i)})\}$ - ?

$\bar F_A^{(i)} = l_0 F_A^{(i)};$

$\bar F_B^{(i)} = -l_0 \bar F_A^{(i)}$

$dA(\bar F_A^{(i)}) + dA(\bar F_B^{(i)}) = \bar F_A^{(i)} \cdot \bar\vartheta_A\,dt + \bar F_B^{(i)} \bar\vartheta_B\,dt =$

$= F_A l_0 \bar\vartheta_A\,dt - F\,l_0 \bar\vartheta_B\,dt =$

$= F_A\,dt\,\{\underbrace{\vartheta_A \cos(\bar l_0, \hat{\ } \bar\vartheta_A) - \vartheta_B \cos(\bar l_0, \hat{\ } \bar\vartheta_B)}_{=0}\}$

А если просуммировать по всем т. тв. тела, то $\Sigma$ элем. работ всех сил внутри тела:

$\boxed{\sum\limits_k dA(\bar F_k^{(i)}) = 0.}$ - только для тв. тел!

Мощность:

$W = \dfrac{dA}{dt}$ - работа, которую совершает тело за время

$W = \bar F \bar\vartheta;$

$1\,\dfrac{\text{Н·м}}{\text{с}} = \dfrac{1\,\text{Дж}}{\text{с}} = 1$ Вт

Кинетическая энергия для точки (T):

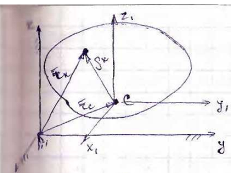
$T = \dfrac{m\vartheta^2}{2},$ $\left[\dfrac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2} = 1\,\text{Н}\cdot\text{м} = 1\,\text{Дж}\right]$

$\vartheta$ - абсолютная скорость.

Для мех. сис-мы: $T = \sum\limits_k T_k = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{N} m_k \vartheta_k^2,$

$\vartheta_k$ - абсолютн. скорость точки

Теорема: кинетич. энергия системы при её сложном движении. (теорема Кёнига).




C - ц.м.

система $Cx_1y_1z_1$ относит. $Oxyz$ движется поступательно.

$T = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{N} m_k \vartheta_k^2$

$\bar r_k = \bar r_c + \bar\rho_k$

расписано по форм. Бура

$\bar\vartheta_k = \dfrac{d\bar r_k}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\bar r_c + \bar\rho_k) = \underbrace{\dfrac{d\bar r_c}{dt}}_{\bar\vartheta_c} + \dfrac{d\bar\rho_k}{dt} = \bar\vartheta_c +$

$+ \underbrace{\dfrac{\tilde d\bar\rho_k}{dt}}_{\bar\vartheta_{kr}} + \overset{=0}{\bar\omega} \times \bar\rho_k \Rightarrow$ , т.к. поступат. движ.

$T = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{N} m_k \bar\vartheta_k^2 = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{N} m_k(\bar\vartheta_c + \bar\vartheta_{kr})^2 =$

$= \frac{1}{2}\underbrace{\left(\sum\limits_{k=1}^{N} m_k\right)}_{M}\bar\vartheta_c^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{N} m_k \bar\vartheta_{kr}^2}_{T_c^{(r)}} + \underbrace{\sum\limits_{k=1}^{N} m_k \bar\vartheta_c \cdot \bar\vartheta_{kr}}_{=0} =$

относит. ц.м. в относит движ.

$\Sigma m_k \bar\vartheta_{kr} = \Sigma m_k \dfrac{\tilde d\bar\rho_k}{dt} = \dfrac{\tilde d}{dt}\underbrace{\left(\sum\limits_{k=1}^{N} m_k \bar\rho_k\right)\dfrac{\Sigma m_k}{\Sigma m_k}}_{=0}$

$T = \frac{1}{2}M\bar\vartheta_c^2 + T_c^{(r)}.$

Кинетич. энергия сис-мы в абсолютн. движ. складывается из кинетич. энергии ц.м., если в нём сосредоточить всю массу сис-мы и кинетич. энергии сис-мы относит. ц.м.

Вычисление кинетической энергии тв. тела.

1) Поступательное движение.

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \bar{v}_k^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N} m_k\right)\bar{v}^2 = \frac{1}{2}M\bar{v}^2,$$

($v$ – скорость $\forall$ т.)

2) Вращательное движ. относит. неподвижной оси.


$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \bar{v}_k^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \omega^2 h_k^2 =$$

$$v_k = h_k \cdot \omega$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2\left(\sum_{k=1}^{N} m_k h_k^2\right) = \frac{1}{2} J_{oz}\cdot\omega^2.$$

3) Плоское движение.


(по т. Кёнига ⇒)

$$T = \frac{1}{2}Mv_c^2 + T_c^{(z)} =$$

$$= \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2} J_{cz}\cdot\omega^2$$

При плоском движ. тела кинетич. энергия складыв. из кинетич. энергии поступат. движ. тела вместе с ц. м. и кинетич. энергии от вращения вокруг оси, проходящей через ц. м. и ⊥-ной плоскости движения.

Теорема об изменении кинетической энергии.

для точки.

II закон Ньютона: $m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} \quad \cdot d\bar{r};$

$$m\,d\bar{r}\,\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}\cdot d\bar{r}$$

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}$$

$$d\Big(\underbrace{\frac{mv^2}{2}}_{T}\Big) = \bar{F}\cdot d\bar{r} = dA(\bar{F})$$

$dT = dA(\bar{F})$ – дифф. форма записи закона об изменен. кинетич. энергии

Дифф. кин. энергии = Элемент. A силы, прилож. к точке.

Проинтегрировав, ⇒ $T - T_0 = \int dA(\bar{F}) = A(\bar{F})$ – в конечной или интегральной форме записи.

Изменение T точки при её конечном перемещении = A силы, прилож. к т. на том же перемещении.

для механич. сис-мы.

$$m_k\frac{d\bar{v}_k}{dt} = \bar{F}_k^{(e)} + \bar{F}_k^{(i)} \quad (\text{равнодейств. сил}) \cdot d\bar{r}_k$$

$$m_k\, d\bar{r}_k\,\frac{d\bar{v}_k}{dt} = \bar{F}_k^{(e)}\cdot d\bar{r}_k + \bar{F}_k^{(i)}\cdot d\bar{r}_k$$

$$d\left(\frac{m\bar{v}_k^2}{2}\right) = dA(\bar{F}_k^{(e)}) + dA(\bar{F}_k^{(i)}), \quad k = \overline{1,n}$$

складываем:

$$\boxed{dT = \sum_k dA(\bar{F}_k^{(e)}) + \sum_k dA(\bar{F}_k^{(i)})}$$ – в диф. форме записи.

Диф-ал кинетич. энергии мех. сис-мы = Σ элемент. работ внешних и внутр. сил.

Интегрируя обе части этого ур-ния м/у начальным и конечным полож. сис-мы:

$$T - T_0 = \sum_k A(\bar{F}_k^{(e)}) + \sum_k A(F_k^{(i)}), \quad k = \overline{1,n}.$$ – интегральная форма записи (в конечной форме записи).

Изменение T мех сис-мы при её перемещении из одного полож. в другое = Σ работ вн. и внутр. сил на перемещ. их точек положения.

для тв. тела $\sum_k dA\,(F_k^{(i)}) = 0$.

$$\sum A\,(F_k^{(i)}) = 0.$$

теорема об изм. T. эн в диф. форме записи:

ускорение точек (или угловые ускорения тел);

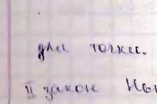
составление диф. ур-ний движения.

в интегр. форме записи:

установл. связь м/у $v$ и перемещ. какой-л точки сис-мы или связь м/у ∠ поворота и ω какого-л. тела.

Пример:

составить ур-ние движения.




$$dT = \sum A(\bar{F}_k^{(e)}) + \sum A(\cancel{\bar{F}_k^{(i)}})$$ $0$

$$T = \frac{1}{2}J_{oz}\cdot\omega^2$$

т.к. против φ

$$dA(m\bar{g}) = M_{oz}(m\bar{g})\cdot d\varphi = -mg\,a\sin\varphi\cdot d\varphi$$

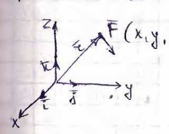
$$\frac{1}{2}J_{oz}\cdot 2\omega\,d\omega = -mg\cdot a\sin\varphi\cdot d\varphi \qquad \frac{1}{dt}.$$

$$J_{oz}\cdot\omega\,\frac{d\omega}{dt} = -mg\cdot a\sin\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dt}.$$

$$J_{oz}\cdot\ddot{\varphi} + mga\sin\varphi = 0.$$

Силовое поле, силовая функция.

Силовое поле – часть пространства, в котор. на матер. т. действует сила, зависящая от координат т и от t.




Если сила явно не зависит от t, то силовое поле – стационарное.

Стационарное силовое поле – потенциальное, если проекции силы на Ox, Oy, Oz можно выразить через некоторую функцию $U(x, y, z)$:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Функция $U(x, y, z)$ – силовая функция, определяется с точностью до const.

$$\bar{F} = \frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\bar{k} = \mathrm{grad}\,U.$$

Св-ва потенциального поля:

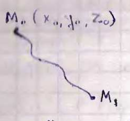
1°. Элементарная A силы потенц. поля = полному дифференциалу силовой функции.

$$dA = \bar{F}\,d\bar{r} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz =$$

$$= \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = dU.$$

$dA = dU.$

2°. Полная $A$ силы потенциального силового поля не зависит от траектории, по котор. перемещ. т., а определяется лишь нач. и конечн. полож. точки.




$M$ – в произв. момент $t$.

$$A = \int_{M_0}^{M} dA = \int_{M_0}^{M} dU = U_M - \cancel{U_{M_0}} = U_M - C,$$

$C$ (const)

а силовая функц. опред. с точностью до const.

3° $A$ силы потенц. силового поля по $\forall$ замкнутому перемещению $=0$, т.к. знач. силовой функции в нач. и конечн.

(если внутри замкнутого контура нет особых точек для силовой функции)

4° Условие $\exists$ силовой функции

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

вычислим $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial x}$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y},$$

Если использовать вектор-вихрь ($\operatorname{rot} \bar F$):

$$\operatorname{rot} \bar F = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\bar i + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\bar j + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\bar k = 0.$$

Если поле потенциально, то не должно быть вихревым.

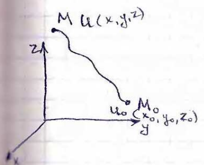
Непотенциальные силы: силы сопротивл., зависящие от $v$ и силы трения.

Если рассматривать т. потенц. поля, в кот. силовая ф. имеет одно и то же знач., то они находятся на поверхности равного уровня или поверхность уровня.

Уравнение пов-ти равного уровня:

$$U(x, y, z) = C.$$

Потенц. силовое поле хар-тся силовой ф. и потенц. энергией ($\Pi$).




Потенц. энергия матер. точки в рассматр. точке силового поля (т. $M$) – работа, котор. совершают силы поля, действующ. на мат. т. при перемещении её из полож. $M$ в нач. положение $M_0$.

$$\Pi = A_M^{M_0} = \int_M^{M_0} dA = \int_M^{M_0} dU = \cancel{U_{M_0}} - U_M = C - U_M$$

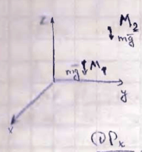
$C$ (const)

(определяется с точностью до const);

$$d\Pi = -dU = -dA \Rightarrow$$

$$\boxed{dA = dU = -d\Pi}$$

Прим: однородное поле силы тяжести.




$g = \mathrm{const}$, $m$

сила $mg = P$.

$P_x = 0$; $P_y = 0$, $P_z = -mg$.

$\dfrac{\partial P_x}{\partial y} = \dfrac{\partial P_y}{\partial x}$ ← выполняется;

$\dfrac{\partial P_z}{\partial z} = \dfrac{\partial P_z}{\partial x}$

$\dfrac{\partial P_y}{\partial z} = \dfrac{\partial P_z}{\partial y} \Rightarrow$ силовое поле потенциально.

$$dA = P_x \cdot dx + P_y\,dy + P_z\,dz = -mg\,dz = \underline{d(-mgz) = dU}$$

работа:

$$A = \int_{M_1}^{M_2} dA = \int_{M_1}^{M_2} d(-mgz) = -mg(z_2 - z_1);$$

силовая функция:

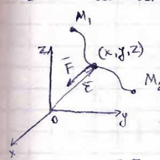
$$U = \int_{M_1}^{M_2} dU = \int d(-mgz) = -mgz + C$$

потенциальная энергия:

$$\Pi = \int_{M_2}^{M_1} dA = \int_{M_2}^{M_1} d(-mgz) = -mg(z_1 - z_2)$$

поверхность равного уровня – плоскость

Поле линейной силы упругости.




по закону Гука: $\bar F = -c\bar r$, $c$ – коэф. жёсткости.

$F_x = -cx$,
$F_y = -cy$,
$F_z = -cz$.

$\dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial x}$; и т.д. – выполняется → поле линейной силы упругости – потенциально.

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -cx\,dx - cy\,dy - cz\,dz.$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

$$2r\,dr = 2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz.$$

$$dA = -cr\,dr = d\left(-\frac{cr^2}{2}\right),$$

$r$ – деформация закреплённой в т.О пружины.

$$A = \int_{M_1}^{M_2} dA = \int_{M_1}^{M_2} d\left(-\frac{cr^2}{2}\right) = -\frac{c}{2}\left(r_2^2 - r_1^2\right)$$

деформ. пружины в конч. и нач. т.

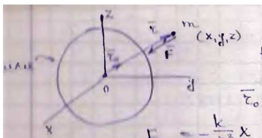
$$U = \int dU = \int dA = \int d\left(-\frac{cr^2}{2}\right) = -\frac{cr^2}{2} + C.$$

поверхность равного уровня – сфера.

$$\Pi = \int d\Pi = -\int_{M_1}^{M_2} dA = -\int_{M_1}^{M_2} d\left(-\frac{cr^2}{2}\right) = +\frac{c}{2}\left(r_2^2 - r_1^2\right).$$

Ньютоновское гравитационное поле.

$$F = G\,\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$




$$F = \frac{m G M_з}{r^2} = \frac{k}{r^2}.$$

$$\bar r_0 = +\frac{\bar r}{r}\ ;\quad \bar F = -\frac{k}{r^2}\cdot \bar r_0 = -\frac{k}{r^3}\cdot \bar r$$

$$F_x = -\frac{k}{r^3}x\ ;\quad F_y = -\frac{k}{r^3}y\ ;\quad F_z = -\frac{k}{r^3}z.$$

будут ли поле потенциальным:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}\ ;\quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}\ ;\quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}.$$

$$dA = dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz =$$

$$= -\frac{k}{r^3}\underbrace{(x dx + y dy + z dz)}_{r dr} \Rightarrow$$

$$dA = dU = -\frac{k}{r^2}dr = d\left(\frac{k}{r}\right)$$

$$A = \int_{M_1}^{M_2} dA = \int_{M_1}^{M_2} d\left(\frac{k}{r}\right) = k\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

$$U = \int dA = \int d\left(\frac{k}{r}\right) = \frac{k}{r} + C.$$

$$\Pi = -\int_{M_1}^{M_2} dA = -\int_{M_1}^{M_2} d\left(\frac{k}{r}\right) = -k\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

Силовая функция и потенциальная энергия механ. сис-мы.

Для механ. сис-мы в потенц. силовом поле силовая функция - функция от координат всех точек сис-мы:

$$U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_N, y_N, z_N)$$

Проекции силы, действ. на k-ую т.:

$$F_{kx} = \frac{\partial U}{\partial x_k}\ ;\quad F_{ky} = \frac{\partial U}{\partial y_k}\ ;\quad F_{kz} = \frac{\partial U}{\partial z_k}$$

вычислим $\Sigma$ элем. работ сил, прилож. к k-ой т.:

$$\sum_{k=1}^{N} dA_k = \sum_{k=1}^{N}(F_{kx}dx_k + F_{ky}dy_k + F_{kz}dz_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial U}{\partial x_k}dx_k + \frac{\partial U}{\partial y_k}dy_k + \frac{\partial U}{\partial z_k}dz_k\right) = dU.$$

Сумма элем. A сил поля, действ. на механ. сис-му, = полному диффер-у силовой функции.

$$\sum_{k=1}^{N} A_k = \sum_{k=1}^{N}\int_{M_0}^{M} dA_k = \int_{M_0}^{M}\sum_{k=1}^{N} dA_k = \int_{M_0}^{M} dU = U_M - \overset{C\ (\mathrm{const})}{\cancel{U_{M_0}}} =$$

$$= U_M - C.$$

Потенциальная энергия сис-мы в рассматр. положении M потенциаль. силового поля $-\Sigma$ работ сил поля, действующих на сис-му, которую эти силы совершают при перемещении сис-мы из рассматр. полож. M в начальное положение $M_0$:

$$\Pi = \sum_{k=1}^{N}\int_{M}^{M_0} dA_k = \int_{M}^{M_0}\sum_{k=1}^{N} dA_k = \int_{M}^{M_0} dU = \overset{C}{\cancel{U_{M_0}}} - U_M$$

$$\left.\begin{aligned} F_{kx} &= \frac{\partial U}{\partial x_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \\ F_{ky} &= \frac{\partial U}{\partial y_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_k} \\ F_{kz} &= \frac{\partial U}{\partial z_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_k} \end{aligned}\right\}$$

$$\Sigma A_k = U - U_0 = \Pi_0 - \Pi.$$

Закон сохранения механической энергии.

Для точки.

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = A(\bar F) = \Pi_0 - \Pi\ ;$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \Pi = \frac{1}{2}mv_0^2 + \Pi_0 = E = \mathrm{const}. -$$

полная механич. энергия

для системы:

$$T - T_0 = \Sigma A(\bar F_k^{(e)}) + \Sigma A(\bar F_k^{(i)}) = \Sigma A_k^{(e,i)} = \Pi_0 - \Pi$$

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0 = E = \mathrm{const}.$$

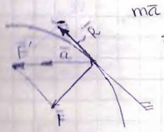
Полная мех. энергия при движении системы в потенциальном силовом поле внешних и внутр. сил является const величиной.

В случае абс. тв. тела - работа внутр. сил $= 0$, тогда потенц. энергия внутр. сил - величина const, которую можно принять $= 0$.

Мех. системы, для которых выполняется з. с. полной механ. энергии - консервативные.

Принцип Даламбера.
(1717 - 1783 гг.)

$$m\bar a = \bar F' \qquad \bar F \text{ - дано}$$




$$\bar F' = \bar F + \bar R$$

$$\boxed{m\bar a = \bar F + \bar R}$$

(точка несвободна)

1743 - „трактат о динамике"

1856 г. Делоне : $\boxed{0 = \bar F + \bar R + \bar\Phi}$, где $\bar\Phi = -m\bar a$ - сила инерции.

принцип Даламбера для точки

метод кинетостатики.

$F$ - активная сила; $\bar R$ - реакция.

Принцип Даламбера:

При движении мат. т. в $\forall$ момент $t$ приложенные к ней активные силы ($F$) и реакции связи (равн. $\bar R$) вместе с силой инерции образуют сис-му, равную 0 или уравновешивающую систему сил

$\underline{x, y, z}$:

$$0 = F_x + R_x + \Phi_x \qquad \Phi_x = -m\ddot x$$

$$0 = F_y + R_y + \Phi_y \qquad \Phi_y = -m\ddot y$$

$$0 = F_z + R_z + \Phi_z \qquad \Phi_z = -m\ddot z$$

$\underline{\tau, n, b}$:

$$0 = F_\tau + R_\tau + \Phi_\tau \qquad \Phi_\tau = -ma_\tau$$

$$0 = F_b + R_b + \Phi_b \qquad \Phi_b = -ma_b = 0$$

$$0 = F_n + R_n + \Phi_n \qquad \Phi_n = -m\frac{v^2}{\rho};$$

Для несвободной точки: $m\bar a = \bar F + \bar R.$

Принцип Даламбера для механической сис-мы.

N точек

(1) $\bar F_k + \bar R_k + \bar\Phi_k = 0\ ,\quad k = \overline{1, N}.$

Принцип Даламбера: при движ. мех. сис-мы в $\forall$ момент $t$ прилож. к каждой т. сис-мы активные силы и реакции связи вместе с силами инерции образуют уравновеш. сис-му сил, т.е. сис-му сил ~ -ную 0.

$$\sum_{k=1}^{N}\bar F_k + \sum_{k=1}^{N}\bar R_k + \sum_{k=1}^{N}\bar\Phi_k = 0$$

$\boxed{\text{I следствие}}$ принципа Даламбера для сис-мы.

↑ главный вектор сил инерции.

$$\bar r_k \times (1)\ :\quad \bar r_k \times \bar F_k + \bar r_k \times \bar R_k + \bar r_k \times \bar\Phi_k = 0\ ,\quad k = \overline{1, N}.$$

$$\sum_{k=1}^{N} M_0(\bar F_k) + \sum_{k=1}^{N}\bar M_0(\bar R_k) + \sum_{k=1}^{N}\bar M_0(\bar\Phi_k) = 0 \qquad \boxed{\text{II следствие}}$$

$\underline{x, y, z}$

$$\sum_k F_{kx} + \sum_k R_{kx} + \Sigma\Phi_{kx} = 0$$

$$\sum_k F_{ky} + \sum_k R_{ky} + \Sigma\Phi_{ky} = 0$$

$$\sum_k F_{kz} + \sum_k R_{kz} + \Sigma\Phi_{kz} = 0$$

(ур-ния равновес. в статике)

$$\sum_k M_{ox}(\bar F_k) + \sum_k M_{ox}(\bar R_k) + \sum_k M_{ox}(\bar\Phi_k) = 0$$
$$\sum_k M_{oy}(\bar F_k) + \sum_k M_{oy}(\bar R_k) + \sum_k M_{oy}(\bar\Phi_k) = 0$$
$$\sum_k M_{oz}(\bar F_k) + \sum_k M_{oz}(\bar R_k) + \sum_k M_{oz}(\bar\Phi_k) = 0$$

точка, от которой отсчитывается радиус-вектор как подвижна, так и неподвижна (может быть).

$\bar F_k + \bar R_k = \bar F_k^{(e)} + \bar F_k^{(i)}$, тогда принцип Даламбера для точки:

(2) $\bar F_k^{(e)} + \bar F_k^{(i)} + \bar\Phi_k = 0$, $k = \overline{1,N}$

$$\sum_{k=1}^N \bar F_k^{(e)} + \underbrace{\sum_{k=1}^N \bar F_k^{(i)}}_{0} + \sum_{k=1}^N \bar\Phi_k = 0$$

$\sum_{k=1}^N \bar F_k^{(e)} + \sum_{k=1}^N \bar\Phi_k = 0$ $\boxed{\text{I следств.}}$

$\bar r \times (2)$: $\sum_{k=1}^N \bar M_o(\bar F_k^{(e)}) + \underbrace{\sum_{k=1}^N \bar M_o(\bar F_k^{(i)})}_{0} + \sum_{k=1}^N \bar M_o(\bar\Phi_k) = 0$

$\sum_{k=1}^N M_o(\bar F_k^{(e)}) + \sum_{k=1}^N \bar M_o(\bar\Phi_k) = 0$ $\boxed{\text{II следствие}}$

$\sum_{k=1}^N \bar\Phi_k = \bar R_{ин}$ $-?$

$\sum_{k=1}^N \bar M_o(\bar\Phi_k^{(e)}) = \bar L_o^{ин}$ $-?$ (главный момент сил инерции)

$$\frac{d\bar Q}{dt} = \sum_{k=1}^N \bar F_k^{(e)}$$

$$M\bar a_c = \sum_{k=1}^N \bar F_k^{(e)}$$

I следств.: $\sum_{k=1}^N \bar F_k^{(e)} + \bar R_{ин} = 0$

$\bar R_{ин} = -\sum_{k=1}^N \bar F_k^{(e)} = -M\bar a_c = -\frac{d\bar Q}{dt}$

$\boxed{\bar R_{ин} = -M\bar a_c}$

пусть т. O – неподвижная $\Rightarrow$

II следств.: $\sum_{k=1}^N \bar M_o(\bar F_k^{(e)}) + \bar L_o^{ин} = 0$

$$\frac{d\bar K_o}{dt} = \sum_{k=1}^N \bar M_o(\bar F_k^{(e)});$$

$\boxed{\bar L_o^{ин} = -\frac{d\bar K_o}{dt}}$

т. O – подвижная точка.

$K_o = r_c \times M\bar v_c + \bar K_c^{(r)}$

$\frac{d\bar K_o}{dt} = \bar r_c \times M\bar a_c + \frac{d\bar K_c^{(r)}}{dt}$; $\bar L_o^{ин} = -\frac{d\bar K_c^{(r)}}{dt} - \bar r_c \times M\bar a_c$

свяжем O с ц. м., $\bar r_c = 0 \Rightarrow$

$\bar L_o^{ин} = -\frac{dK_c^{(r)}}{dt}$ – в относит. движ. (относит. ц. м.)

Силы инерции тв. тела в частных случаях его движения.

1) Поступательное движ. тв. тела.
точка приведения (приложения) сил. вектора инерции – ц. м.

$\bar R_{ин} = -M\bar a_c$ – приложен в ц. м.
$\bar L_o^{ин} = 0$.

2) Вращательное движ. тв. тела относит. неподв. оси.

$\bar R_{ин} = -M\bar a_c$, $\bar L_o^{ин} = -\frac{d\bar K_o}{dt}$.

Точка приведения (центр) – точка на оси вращения. неподвижная точка, $\Rightarrow$

$\bar R_{ин} = 0$; $L_x^{ин} = -\frac{dK_x}{dt}$; $L_y^{ин} = -\frac{dK_y}{dt}$; $L_z^{ин} = -\frac{dK_z}{dt}$.

Если ось вращения – ось матер. симметрии и пл-ть Oxy – пл-ть матер. симметрии тела, тогда $L_x^{ин} = 0$ и $L_y^{ин} = 0$, $K_z = J_z \cdot \omega \Rightarrow$

$L_z^{ин} = -J_z \cdot \varepsilon$.

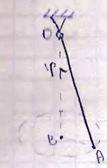
3) плоское движение.
центр приведения – центр масс

$\bar R_{ин} = -M\bar a_c$, $\bar L_c^{ин}$ $-?$

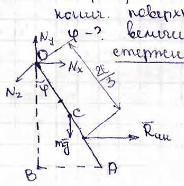
II следств.: $\sum_{k=1}^{\infty} \bar M(\bar F_k^{(e)}) + \bar L_c^{ин} = 0$

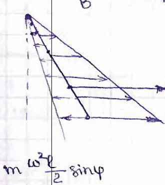
$\frac{d\bar K_c^{(r)}}{dt} = \sum \bar M_c(\bar F_k^{(e)})$; $\bar L_c^{ин} = -\frac{d\bar K_c^{(r)}}{dt}$.

Пример. тонкий прямолин. однородн. стержень $OA = l$, $m$, $\omega = const$ конич. поверхн. описывает. $\varphi$ -? величина давления стержня на шарнир -?




внешние силы: $mg$, $N$;



главный вектор сил инерции.

$R_{ин} = m\omega^2 \frac{l}{2} \sin\varphi$

$N_x + R_{ин} = 0$,
$N_y - mg = 0$
$N_z = 0$

моменты x) $0 = 0$; $0 = 0$; $R_{ин} \cdot \frac{2}{3} l\cos\varphi - mg\frac{l}{2}\sin\varphi = 0$

$m\omega^2 \frac{l}{2}\sin\varphi \cdot \frac{2}{3} l\cos\varphi = mg\frac{l}{2}\sin\varphi$

$\sin\varphi\left(\frac{2}{3}\omega^2 l\cos\varphi - g\right) = 0$; $\cos\varphi = \frac{3g}{2\omega^2 l}$.

$N_z = 0$, $N_y = mg$, $N_x = -m\omega^2\frac{l}{2}\cdot\sqrt{1 - \left(\frac{3g}{2\omega^2 l}\right)^2}$

$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2}$

Недостатки применения общих теорем динамики: 24.10.08

1) Нельзя строго классиф. задачи и сказать какие теоремы нужно использовать.

2) Часто приходится расчлен. конструкцию и вводить новые неизв, которые не надо опред.

Были разработаны другие методы, которые рассматр. в разделе:

# Аналитическая механика.

Рассматр. общие метода реш. задач с помощью котор. можно сост. ур-ние движ., не вводя в рассмотрение реакций идеальных связей.

Широко используют понятие: возможных перемещ., обобщ. координат и обобщ. сил

## Связи и их классификация.

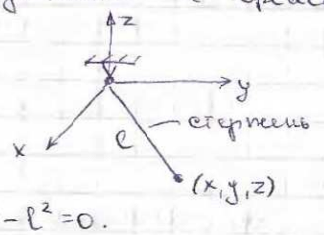
Можно их записать в виде некоторого неравенства:

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ldots, t) \geq 0$$

будем рассматривать связи, зависящие от коорд. точек, 1ых производных и $t$. (уравнения и неравенства).

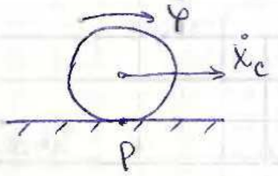
1) Геометрические связи(ь) - если в её ур-ние входит только координаты и время.

$$f(x, y, z, t) = 0$$




$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0.$$

2) Кинематические связи — если в её ур-ние входят ещё произв. по t или только производн. по t.



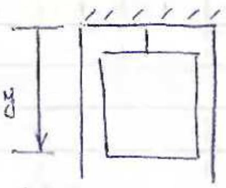

$\dot{x}_c = r\dot{\varphi}$

$\dot{x}_c - r\dot{\varphi} = 0.$

3) Голономные связи — все геометрич. и интегрируемые кинематические (неинтегрируемые кинематич. связи — неголономные).

4) Стационарные — описыв. ур-ниями или неравенств., в которых в явном виде не входит t (склерономные)

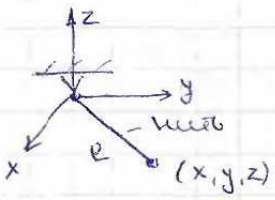
Нестационарные (реономные) — содержат t в явном виде.




$y = vt$ , $y - vt = 0$.

5) Двухсторонняя связь (удерживающая) — выражается равенством

Односторонняя (неудерживающ.) — неравенство




$x^2 + y^2 + z^2 \le l^2$ или

$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 \le 0$.

6) Реальные и идеальные связи.

К идеальным относят все связи без трения.

Возможные перемещения точки.

В механ. рассматр. действительное и возможное перемещение.

Элемент. действит. перемещ. т. – её ∞-но малое перемещение (действ.) $(d\bar{r})$, которое происход. за ∞-но малое $t$ $(dt)$ под действ. прилож. сил или без них с учётом начальных условий и с учётом связей. $(d\bar{r}, dt)$

Возможное перемещ. т. – такое элементарн. мысленное перемещение, которое допускается в данное мгновение наложен. на точку связями. ( $\delta\bar{r}$ – вариация $\bar{r}$ ).

Для стационарн. связей действит. перемещение является одним из возможных перемещений.

$\bar{r} = f(x, y, z, t) = 0$

$$d\bar{r} = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt.$$

$$\delta\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \bar{r}}{\partial z} \delta z$$

(т.к. время – неизмен.)

Возможное перемещение системы механич. точек

Возможное перемещ. сис-мы – ∀ совокупность возможн. перемещений т.-ек сис-мы.

Мех. сис-ма может иметь несколько или ∞-но много возможных перемещений. Вследствие связей не все возможные перемещ. сис-мы незав. независим.

Число независ. возм. перемещ. механ. сис-мы – число степеней свободы этой сис-мы.

1) $x, y, z$ $\quad f(x,y,z) = 0.$ → перемещ.

$$f(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z) = f(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\delta x)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\delta y)^2 + \ldots}_{\text{пренебрегают.}} = 0$$

$x, y, z,$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0.$$

на плоскости: 2 степени свободы.
(число коорд. – ур-ние связи)

Обобщённые координаты сис-мы. Выражение возможн. перемещений через обобщённые координаты.

Пусть сис-ма содержит $N$ т.
$3N$ – декартовых координат.
наложено $l$ связей на сис-му.
(только двухсторонние связи, не рассматр. связи неравенством)

„$3N-l$" – независимых координат.

$3N - l = n$ – независимых координат, обобщённых координат. – независимые параметры, однозначно определяющие положение точки в пр-ве: $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

т. е. $q_i = q_i(x_k, y_k, z_k, t)$, $i = \overline{1,n}$

$$x_k = x_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$$
$$y_k = y_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$$
$$z_k = z_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t).$$

Радиус-вектор $k$-ой точки:

$$\bar{r}_k = \bar{i}x_k + \bar{j}y_k + \bar{k}z_k =$$

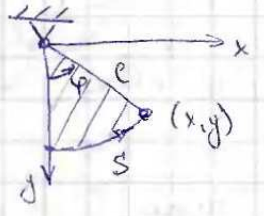
$$= \bar{r}_k(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n, t)$$

возможное перемещение: $\delta \bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_n}\delta q_n =$ ($t$ нет, т.к. в данное мгновение)

$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i \quad , k = \overline{1,N}$ вариация через обобщ. координаты

Возм. перемещ. каждой т. определ. возможн. перемещ. обобщ. координат, которых $n$ шт. По определению число степен. свободы = числу незав. возможных перемещений $\Rightarrow$ для голономных связей (систем) число степ. свободы = числу обобщ. координат.

Пример.




$x, y, z$

$x^2 + y^2 - l^2 = 0$

$\varphi, S, \sigma_{площ.}$ – обобщ. координаты.

Элементарная работа силы на возм. перемещении.

Её определ. по той же форм., что и на действ. перемещении.

$$dA(\bar{F}) = \bar{F} \cdot d\bar{r} = F_x dx + F_y dy + F_z \cdot dz$$

$$\delta A(\bar{F}) = \bar{F} \delta \bar{r} = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z$$

$\bar{F} \cdot \bar{v} dt$ – не годится, т.к. время не варьируется в возм. перемещении.

Для механич. сис-мы: возможная работа.

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \delta \bar{r}_k$$

Идеальные связи.

Связи – идеальные, если для $\forall$ возможн. перемещ. для механ. сист.

сис-ма выполняется условие:

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0$$

$\bar{R}_k$ - реакции связи, $N$ - число т. сис-мы.

Примеры идеальных связей:

1) в абс. тв. теле т. связаны идеальными связями, т.к. силы реакции связи - внутр. силы, а для них $\Sigma$ элемент. работ $=0$.

2) абс. гладк. пов-ть или абс. гладк. линия - идеальные связи для точки, т.к. $\bar{R} \perp \delta \bar{r}$, поэтому все шарниры без трения: подвижн и неподв. - идеальные связи для точек, которые соедин. этими шарнирами.

3) гибкие нерастяжимые связи типа нитей, канатов, тросов - идеаль. связи, т.к. в каждом сеч.-ии такой связи есть 2 реакции, =-ные по модулю и противоп. по напр.

4) закреплённые т, т.к. $\delta \bar{r} = 0$. для этой точки

5) шероховатая пов-ть для катков, катящ. без проскальз. при неучёте тр. кач. - идеальн. связ, т.к. $\vartheta$ ~~прилож~~ этой точке в данное мгнов. $=0$.

Обобщённые силы.

Будем рассматривать идеальные голономные связи. и определим возможн. работу сил, прилож. к данной механ. сис-ме.

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k \quad , \quad \delta \bar{r}_k = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \cdot \delta q_i$$

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left( \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right)}_{Q_i} \delta q_i =$$

$= \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = \delta A$

$Q_i = \sum_{k=1}^{N} F_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}$ – обобщённая сила.
(т.к. $A$ = Дж = Н·м; м = $\delta q_i$ ⇒
$Q$ = Н.)

$[Q_i] = \frac{[A]}{[q]}$ ⇒ $\frac{Н \cdot м}{м}$ ; $\frac{Н \cdot м}{м^2}$ ; $\frac{Н \cdot м}{рад}$ и т.д.

q – длина; площадь

размерность $Q_i$ зависит от размерности обобщ. координат

Способы вычисления обобщ. сил.

1. Из определения: $Q_i$ или $Q_{q_i}$
(обобщ. сила, соотв. $i$-ой обобщ. координате).

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} \left( F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right)$$

2. Из выражения для возм. работы:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_n \delta q_n$$

3. Из (2) ⇒ $Q_i = \frac{\delta A_{q_i}}{\delta q_i}$ (при вариации $q_i$).

4. Справедлив только для потенциальных сил.

$F_{kx} = \frac{\partial U}{\partial x_k}$ ; $F_{ky} = \frac{\partial U}{\partial y_k}$ ; $F_{kz} = \frac{\partial U}{\partial z_k}$ ⇒

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} \left( \frac{\partial U}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z_k} \cdot \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) =$$

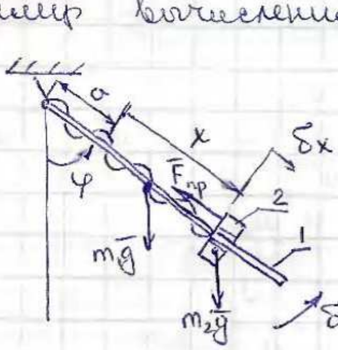
(из (1) формула.)

$$= \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

Связь м/у $U$ и $\Pi$: $U = -\Pi + const$ ; ⇒

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \Rightarrow Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}.$$

Пример вычисления:




длина пруж.

$m_1, m_2, c, a, l$ ← длина стержня

коэф. жёст. пружины

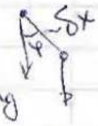
$F_{упр\,(пр)} = cx$

2 обобщ. координаты: $Q_x$ и $Q_\varphi$

активные силы; произв. сост. рассматр. и полагаем, что:

$Q_x - ?$ $\delta x \neq 0$, $\delta\varphi = 0$ (зафиксировали $\varphi$)

$$\delta A_x = -F_{пр}\cdot\delta x + m_2 g\cos\varphi\cdot\delta x \Rightarrow$$




$$Q_x = \frac{\delta A_x}{\delta x} = m_2 g\cos\alpha - cx$$

$Q_\varphi - ?$ $\delta\varphi \neq 0$, $\delta x = 0$

момент

$$\delta A_\varphi = -m_1 g\frac{l}{2}\sin\varphi\cdot\delta\varphi - m_2 g\,(a+x)\sin\varphi\,\delta\varphi$$

$$Q_\varphi = \frac{\delta A_\varphi}{\delta\varphi} = -g\left[m_1\frac{l}{2} + m_2(a+x)\right]\sin\varphi$$

(проверить размерность)

31.10.06. Принцип Даламбера – Лагранжа (основное ур-ние механики/динамики)

Для т. по принципу Даламбера:

$\bar F_k + \bar R_k + \bar\Phi_k = 0$. 1) умножаем на → вариации радиуса-вектора: $\delta\bar r_k$, $k = \overline{1,N}$.

$\bar F_k$ — активн. сила; $\bar R_k$ — реакция связи; $\bar\Phi_k$ → сила инерции

и 2) складываем:

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \delta\bar{r}_k + \sum_{k=1}^{N} \bar{R}_k \cdot \delta\bar{r}_k + \sum_{k=1}^{N} \bar{\Phi}_k \cdot \delta\bar{r}_k = 0$$ — общее ур-ние механики / динамики; математич. выраж. принципа Даламбера - Лагранжа для $\forall$ типов связей

Для идеальных связей:
(д/идеал. связей: $\sum_{k=1}^{N} \bar{R}_k \cdot \delta\bar{r}_k = 0$)

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} (F_k + \Phi_k) \cdot \delta\bar{r}_k = 0,}$$ (для систем с идеальными связями)

где $\Rightarrow \bar{\Phi}_k = -m_k \bar{a}_k = -m_k \ddot{\bar{r}}_k$

В $\forall$ момент движ. сис-мы с идеаль. связями $\Sigma$-ма элемент. работ всех активных сил и сил инерции точек сис-мы $= 0$ на $\forall$ возможном перемещении сис-мы допускаемом связями.

Другие формы записи:

1) $$\sum_{k=1}^{N} \{(F_{kx} + \Phi_{kx})\delta x_k + (F_{ky} + \Phi_{ky})\delta y_k + (\Phi_{kz} + F_{kz})\delta z_k\} = 0.$$

$$\begin{cases} \Phi_{kx} = -m_k \ddot{x}_k \\ \Phi_{ky} = -m_k \ddot{y}_k \\ \Phi_{kz} = -m_k \ddot{z}_k \end{cases}$$

2) Если сис-ма подчинена голономным идеальным 2х-сторонним связям и имеет $n$ степеней свободы, то вариация радиус-вектора:

$$\delta\bar{r}_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \cdot \delta q_i$$

д/идеаль. связей $\Rightarrow \sum_{k=1}^{N} (\bar{F}_k + \bar{\Phi}_k) \cdot \delta\bar{r}_k =$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\bar{F}_k + \bar{\Phi}_k) \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big\{ \underbrace{\Big( \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \Big)}_{\substack{\text{обобщён.} \\ \text{сила активн.} \\ \text{сил} \\ Q_i}} + \underbrace{\Big( \sum_{k=1}^{N} \Phi_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \Big)}_{\substack{\text{обобщ. сила} \\ \text{сил инерции} \\ Q_i^{(\Phi)}}} \Big\} \cdot \delta q_i = 0.$$

$$\underline{Q_i + Q_i^{(\Phi)} = 0}, \quad i = \overline{1,n}$$

Элементарная работа сил инерции тв. тела в различных случаях его движения.

1) Поступат. движение.
(сумма всех сил инерции свод. к гл. вектору)

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{\Phi}_k = -M\bar{a}_c \Rightarrow$$ сумма возм. работ всех сил инерции:

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{\Phi}_k \cdot \delta \bar{r}_k = -M\bar{a} \cdot \delta \bar{r}$$

2) Вращат. движ. тв. тела вокруг неподвижной оси.
$oz$ – ось вращения.
проекция гл. момента сил инерции на эту ось:

$$L_{oz}^{(\Phi)} = -J_{oz} \cdot \varepsilon.$$

Сумма возм. работ всех сил инерции:

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{\Phi}_k \cdot \delta \bar{r}_k = -J_{oz} \cdot \varepsilon \cdot \delta \varphi$$

3) Плоское движ. тв. тела.
ц. м. – т. приведения сил инерции.

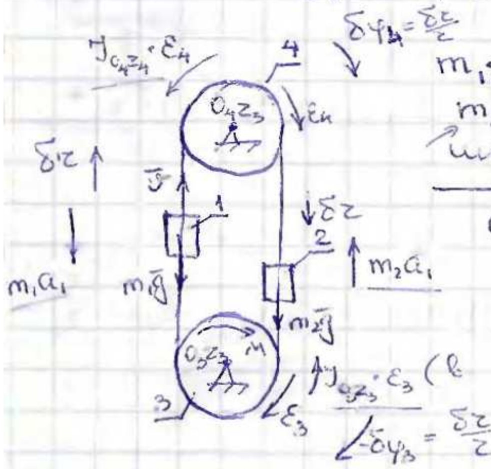
вариация р.-вектора ц.м.

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{\Phi}_k \cdot \delta \bar{r}_k = - M \bar{a}_c \cdot \delta \bar{r}_c - J_{cz} \cdot \varepsilon \cdot \delta \varphi$$

вариация угла поворота.

Пример.

46.6. – Мещерский, 1986г.




$m_1$; $m_2$; M – момент

$m_3 = m_4 = m$; $r_3 = r_4 = r$.

шкивы – это цилиндры;

$a_1$ – ?

механич. сис-ма: 1,2,3,4 и невесомая нить.

принцип Даламбера-Л.: $\sum_{k=1}^{N} (\bar{F}_k + \bar{\Phi}_k) \delta \bar{r}_k = 0$; (*)

силы тяж. – активные силы + и сила с моментом (для тела 3).

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \frac{a_1}{r}$$

Выбираем возм. перемещение для (1) – пусть вверх ⇒ $\delta r \Rightarrow \delta\varphi_4 = \frac{\delta r}{r}$ (у (4)) $\Rightarrow \delta\varphi_3 = \frac{\delta r}{r}$.

(*) $-m_1(a_1 + g)\delta r + m_2 (g - a_1) \delta r - J_{O_4z_4} \varepsilon_4 \cdot \delta\varphi_4 -$

$- J_{O_3z_3} \cdot \varepsilon_3 \cdot \delta\varphi_3 + M \cdot \delta\varphi_3 = 0.$

$\delta\varphi_3 = \delta\varphi_4 = \frac{\delta r}{r}$; ⇒ в (*) ⇒

$$\delta r \left\{ -m_1 a_1 - m_1 g + m_2 g - m_2 a_1 - \cancel{2} \cdot \frac{m r^{\cancel{2}}}{\cancel{2}} \cdot \frac{a_1}{\cancel{r}} \cdot \frac{1}{\cancel{r}} + M \cdot \frac{1}{r} \right\} = 0$$

(1) $(m_2 - m_1) g + \frac{M}{r} = a_1 (m_1 + m_2 + m) \Rightarrow$

$$a_1 = \frac{(m_2 - m_1) g + \frac{M}{r}}{m_1 + m_2 + m}.$$

Через обобщ. силы:
(число степ. свободы сис-мы = 1)

$Q + Q^{(\Phi)} = 0.$ $\delta A^{(F)} \leftarrow$ возм. работа активных сил

по опред.: $Q = \frac{\delta A^{(F)}}{\delta r} = \frac{1}{\delta r} \Big\{ -m_1 g \cdot \delta r + m_2 g \delta r +$

$+ M \frac{\delta r}{r} \Big\} = \frac{M}{r} + g(m_2 - m_1)$;

обобщ. сила за счёт сил инерции:

$Q^{(\Phi)} = \frac{\delta A^{(\Phi)}}{\delta r} = \frac{1}{\delta r} \Big\{ -m_1 a_1 \delta r - m_2 a_1 \cdot \delta r - J_{O_4 z_4} \cdot \varepsilon_4 \cdot \frac{\delta r}{r_4} -$

$- J_{O_3 z_3} \cdot \varepsilon_3 \cdot \frac{\delta r}{r_3} \Big\} = \frac{1}{\delta r} \Big\{ -(m_1 + m_2) a_1 \cdot \delta r -$

$- \cancel{2} \cdot \frac{m r^2}{\cancel{2}} \cdot \frac{a_1}{r} \cdot \frac{\delta r}{r} \Big\}$

Если сложить $Q$ и $Q^{(\Phi)}$, то получим ур-ние (1).

## Принцип Лагранжа

(принцип возможных / виртуальных перемещений).
1787 - 1787 г.
(положение, принимаемое без док-ва).

Принцип Лагранжа:
Для равновесия механ. сис-мы, подчинён. идеальным стационарным и 2х - сторонним связям н/д, чтобы $\Sigma$ элемент. работ всех активных сил, приложенных к точкам системы была $= 0$ на $\forall$ возможном перемещении сис-мы.

$\sum\limits_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0$ — математ. запись под положением равновесия механ. сис-мы: такое её положение, в котором она может находиться сколь угодно долго, если в нач. момент $t$ сис-ма была приведена в это положение с нулевыми скоростями.

Док-во.

1) Необходимость.

$\ulcorner$ $\bar F_k + \bar R_k = 0$ ; $\cdot\, \delta \bar r_k$ , $k = \overline{1,N}$ $\Rightarrow \Sigma \Rightarrow$ (д/ точки:)

актив. сила; реакция связи

$$\sum_{k=1}^{N} \bar F_k \cdot \delta \bar r_k + \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \bar R_k \cdot \delta \bar r_k}_{\text{д/ идеаль. связей } = 0} = 0. \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{N} \bar F_k \cdot \delta \bar r_k = 0.$$

необходимость $\Delta$

2) Достаточность.

$\ulcorner$ „от противного".

Пусть $\sum_{k=1}^{N} \bar F_k \cdot \delta \bar r_k = 0$ выполняется, но сис-ма вышла из равновесия $\Rightarrow$ совершила некое действит. перемещение, то работа не нулевая:

$$\sum_{k=1}^{N} (\bar F_k + \bar R_k)\, d\bar r_k \neq 0$$

$$\sum_{k=1}^{N} (\bar F_k + \bar R_k)\, \delta \bar r_k \neq 0 \quad \text{(т.к. возм. перемещ. явл. одним из возм.?)}$$

$$\sum_{k=1}^{N} \bar R_k \delta \bar r_k = 0.$$

$$\sum_{k=1}^{N} \bar F_k \cdot \delta \bar r_k = 0$$

достаточность $\Delta$.

Этот принцип можно использовать д/ определ. неизвест. сил реакции. Д/ этого связь, силы реакц.

котор. надо определить отбрасыв, заменив её силами реакц. Их добавл. к активн. силам. Оставшиеся связи должны быть идеальн. Иногда неидеальн. связь заменяют идеальн. компенсируя идеальность соответств. силами.

## Условие равновесия сис-мы в различных формах записи.

1) $\sum_{k=1}^{N} (F_{kx}\delta x_k + F_{ky}\delta y_k + F_{kz}\delta z_k) = 0.$

2) д/ систем, подчин. голоном. стационарным идеальным и 2х-сторонним связям:

$$\delta \bar{r}_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i .$$

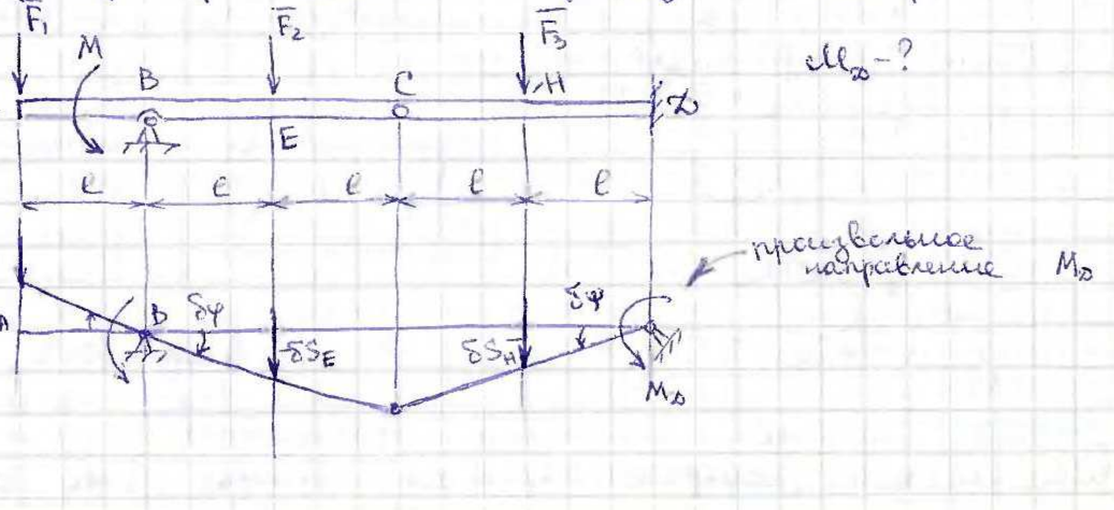
$$\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + \ldots + Q_n \cdot \delta q_n = 0 \Rightarrow$$

$Q_1 = 0;\ Q_2 = 0, \ldots, Q_n = 0.$ ⇒ ур-ния равновесия.

3) $Q_{q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0$, $\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0$, $i = \overline{1,n}$.
(если силы потенциальны)

## Пример применения принципа Лагранжа.

$M_D$ - ?



по принц. Лагранжа: $\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0$;

$$-F_1 \cdot \delta S_A - M \cdot \delta\varphi + F_2 \delta S_E + F_3 \delta S_H + M_D \cdot \delta\psi = 0.$$

(по принципу возм. перемещ., т.е. по пр. Лагранжа)

$$\delta S_H = \delta S_A = \delta S_E = l \cdot \delta\varphi \; ; \quad \delta\psi = \delta\varphi$$

$$-F_1 l \delta\varphi - M\delta\varphi + F_2 l \delta\varphi + F_3 l \delta\varphi + M_D \delta\varphi = 0;$$

$$+M + l(F_1 - F_2 - F_3) = +M_D.$$

если $F_1 = F_2 = F_3 = F$.

6.11.08

## Уравнение Лагранжа II рода

общее ур-ние динамики: $Q_i + Q_i^{(\Phi)} = 0$, $i = \overline{1,n}$ (число степеней свободы)

$$\underline{-Q_i^{(\Phi)}} = Q_i \quad \text{(обобщ. силы)}$$

$$-Q_i^{(\Phi)} = -\sum_{k=1}^{N} \bar{\Phi}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \quad \text{(по определению)}$$

$$= -\sum_{k=1}^{N} \left(-m_k \ddot{\bar{r}}_k\right) \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot \underline{\ddot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}} \qquad (2)$$

рассмотрим:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right) = \underline{\ddot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}} + \dot{\bar{r}}_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right)$$

$$\ddot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right) - \dot{\bar{r}}_k \underline{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right)} \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\bar{r}_k}{dt}\right) = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i} \; ; \quad \dot{\bar{r}}_k = \frac{d\bar{r}_k}{dt} \; ;$$

если связи голономные идеальные и 2х-сторонние, то

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

$$\frac{d\bar{r}_k}{dt} = \dot{\bar{r}}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}}$$

в (1) $\Rightarrow$ $$\ddot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left\{ \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} \right\} - \dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i}$$

(2): $$-Q_i^{(\Phi)} = \sum_{k=1}^{N} m_k \left\{ \frac{d}{dt}\left( \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i} \right\} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \underbrace{\left( \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot \frac{\dot{\bar{r}}_k^2}{2} \right)}_{T\text{-кин. энергия}} \right\} - \frac{\partial}{\partial q_i} \underbrace{\left( \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot \frac{\dot{\bar{r}}_k^2}{2} \right)} = Q_i$$

Ур-ние Лагранжа II рода:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i}, \quad i = \overline{1,n}.$$

частные производн.

T по об... скорости.

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$$

$$\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = 0 ;$$

$$\frac{d}{dt}\left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

$$\frac{d}{dt}\left[ \frac{\partial (T+U)}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial (T+U)}{\partial q_i} = 0$$

$T + U = T - \Pi = L$ функция Лагранжа (Лагранжиан)

$$\frac{d}{dt}\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = \overline{1,n}$$

бывают такие обобщ. координаты, что $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$.

, тогда $q_i$ – циклическая координата

д/ циклич. координат ; $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = const$

Порядок выполнения операций при составлении ур-ния Лагранжа II рода

1) Вычислить кинетич. энергию механ. сис-мы в её движ. относит. инерциальной с.о.

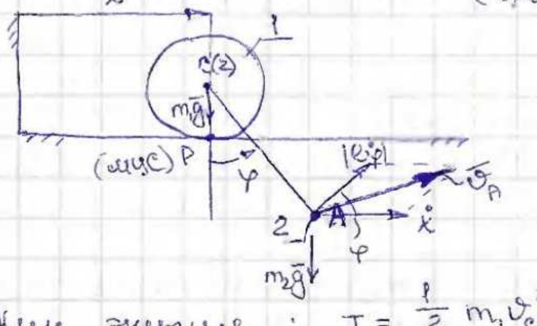
2) Выбрать обобщён. координ. сис-мы и преобразовать кинетич. энергию через эти обобщ. координаты.

3) Выполнить операции дифф-ния, предусмотр. ур-нием Лагранжа II рода.

4) Вычислить обобщ. силы

5) Записать ур-ние Лагранжа.

Пример составления ур-ния Лагранжа. (Зад 9/3)
(фактически ур-ние движения)




$m_1$ ; $r$

$m_2$ ; $AC = l$

1) Кин. энергия ; $T = \frac{1}{2} m_1 \vartheta_c^2 + \frac{1}{2} J_{cz} \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vartheta_A^2$

2) 2 степени свободы;

$q_1 = x$ ; $q_2 = \varphi$ ; $\vartheta_c = \dot{x}$ ; $\omega_1 = \frac{\vartheta_c}{r} = \frac{\dot{x}}{r}$ ;

$J_{cz} = \frac{m_1 r^2}{2}$ ; $\bar{\vartheta}_A = \bar{\vartheta}_c + \bar{\vartheta}_{Ac}$ ; $\vartheta_c = \dot{x}$ ; $\vartheta_{Ac} = AC \cdot \dot{\varphi}$

$$\vartheta_A^2 = \dot{x}^2 + \ell^2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{x}\ell\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 r^2}{2}\cdot\frac{\dot{x}^2}{r^2} + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}^2 + \ell^2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{x}\ell\dot{\varphi}\cos\varphi\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\dot{x}^2\left(\frac{3}{2}m_1 + m_2\right) + \frac{1}{2}m_2\ell^2\dot{\varphi}^2 + m_2\ell\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi$$

3) $Q_{q_1} = Q_x$ – ?

$$\Pi = m_2 g\ell(1-\cos\varphi)$$

$x$ – циклическая координата.

$$Q_x = -\frac{\partial\Pi}{\partial x} = 0 \quad (\text{из усл. циклич.})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x.$$

$$\ddot{x}\left(\frac{3}{2}m_1 + m_2\right) + \frac{d}{dt}\left(m_2\ell\dot{\varphi}\cos\varphi\right) = 0;$$

$$\ddot{x}\left(\frac{3}{2}m_1 + m_2\right) + m_2\ell\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) = 0$$ – 1ое уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = Q_\varphi \;;\; Q_\varphi = -\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = -m_2 g\ell\sin\varphi$$

$$m_2\ell^2\ddot{\varphi} + m_2\ell\frac{d}{dt}(\dot{x}\cos\varphi) + m_2\ell\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi = -m_2 g\ell\sin\varphi$$

2ое ур-ние Лагранжа.

## Устойчивость положения равновесия механ. сис-мы

Системы с голономными стационарными и 2х-сторонними связями (рассматриваем).

Опишем: $q_1, q_2, \ldots, q_n$ – координатами

по принципу Лагранжа в полож. равновесия все $Q_i = 0$, $i = \overline{1,n}$, но $\exists$ консервативной сис-мы (без $F_{тр}$):

$Q_i = -\frac{\partial П}{\partial q_i} = 0$, т.е. в полож. равновесия $П(q_i)$ имеет экстремум.

Сис-ма n ур-ний: $\frac{\partial П}{\partial q_i} = 0$, $i=\overline{1,n}$



Если при нач. отклонении сис-ма остаётся в отклонённом положении, то такое полож. равн. - безразличное. Если сис-ма при достат. малом нач. возбужд. совершает малые колеб. около нач. полож. равновесия или возвращ. без колебаний - устойчивое. Если сис-ма при достаточн. малом возмущ. всё дальше удаляет-ся от полож. равновесия - неустойчивое равновесие.

Д/ консервативных сис-м справедлива Th Лагранжа-Дирихле:
достаточн. услов. устойчивости полож. равновес. консерват. сис-мы - наличие в ней изолированного (локальн) min-ма потенц. энергии.

$\frac{\partial П}{\partial q_i} = 0$ и $\left(\frac{\partial^2 П}{\partial q_i^2}\right)_0 = 0.$

В реальных сис-ме $\exists F_{тр}$.
Силы за счёт $F_{тр}$ или сил вязкости - диссипа-

тивные.

Силы сопротивления пропорциональные 1ой степени скорости.

$F_k = F_k(\vartheta_k)$

$$F_k(\vec{\vartheta}) = F_k(0) + \left(\frac{\partial F_k}{\partial \vartheta_k}\right)_0 \cdot \vartheta_k + \underbrace{\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 F_k}{\partial \vartheta_k^2}\right)\vartheta_k^2 + \ldots}_{\text{пренебрегают.}}$$

Если в сост. равновесия (т.е. $\vartheta_k = 0$) $F_k(0) \neq 0$ — говорит, что в сис-ме есть сухое трение.

Если в сост. равн.: $F_k(0) = 0 \Rightarrow F_k(\vartheta_k) = \left(\frac{\partial F_k}{\partial \vartheta_k}\right)_0 \cdot \vartheta_k$ говорит, что в сис-ме присутств. линейно-вязкое сопротивление.

$$\bar{F}_k = -\left(\frac{\partial F_k}{\partial \vartheta_k}\right)_0 \cdot \bar{\vartheta}_k = -h_k \bar{\vartheta}_k$$

даёт свой вклад в обобщ. силу.

Вычисл. обобщ. силу за счёт диссипативн. сил, прилож. к $k$-ой точке:

$$Q_{дk} = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = -\sum_{k=1}^{N} h_k \cdot \bar{\vartheta}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i};$$

$$\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \bar{\vartheta}_k}{\partial \dot{q}_i}$$

$$Q_{дk} = -\sum_{k=1}^{N} h_k \vartheta_k \frac{\partial \bar{\vartheta}_k}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{h_k \cdot \vartheta_k^2}{2}\right) = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}$$

диссипативная функция или функция рассеивания Релея

$$\Phi = \sum_{k=1}^{N} \frac{h_k \vartheta_k^2}{2};$$

$\bar{\vartheta}_k = \frac{d\bar{r}_k}{dt}$ и $\bar{r} = \bar{r}(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \Rightarrow$

$$\bar{v}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{k=1}^{N} h_k \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right)^2}_{B(q_1, q_2, \ldots, q_n)} \cdot \dot{q}_i^2 = \frac{1}{2} B(q_i) \cdot \dot{q}_i^2$$

д/ систем с 1ой степ. свободы:

$$\Phi = \frac{1}{2} B(q) q^2$$

Рассмотрим сис-му с 1ой степ. свободы, на котор. действуют только потенц. и диссипатив. силы (для опред. физ смысла функции рассеив. Релея)

$$dT = \Sigma\, dA_{пк} + \Sigma\, dA_{дк}$$

$$\frac{dT}{dt} = \Sigma \frac{dA_{пк}}{dt} + \Sigma \frac{dA_{дк}}{dt}$$

$$\frac{dA_{пк}}{dt} = Q_п \cdot \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial П}{\partial q} \cdot \frac{dq}{dt} = -\frac{dП}{dt}$$

$$\frac{dA_{дк}}{dt} = Q_{дк} \cdot \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial q} \cdot \dot{q} = -B(q)\dot{q}^2 = -2\Phi$$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dП}{dt} - 2\Phi \quad ; \quad -2\Phi = \frac{d(T+П)}{dt} = \frac{dE}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{dE}{dt} = -2\Phi.$$

Удвоенное знач. диссипатив. ф. Релея — убыль полной механ. энергии Релея.

14.11.08.

# Колебания линейных систем с 1ой степенью свободы.

Колебания – процесс, сопровождающийся многократным возрастанием и убыванием некоторых физ. величин.

Обобщ. координата сис-мы: $q$ ⇒

$$(1)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q_q = Q_П + \underbrace{Q_D}_{\text{обобщ. сила диссипативн. сил}} + Q(t)$$

$\ddot q,\ \dot q,\ q$

Колебания около положения устойчивого равновесия

$$Q_П = -\frac{\partial П}{\partial q} \quad \text{(если одна степень свободы)}$$

Кинетич. энергия механ. сис-мы:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \bar v_k^2 ; \quad \bar v_k = \frac{d\bar r_k}{dt}, \quad \bar r_k = \bar r_k(q),$$ т.к. сис-ма с одной степ. свободы

$$\bar v_k = \frac{d\bar r_k}{dt} = \frac{\partial \bar r_k}{\partial q}\cdot \dot q \quad \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2}\underbrace{\left[\sum_{k=1}^{N} m_k \left(\frac{\partial \bar r_k}{\partial q}\right)^2\right]}_{A(q)}\cdot \dot q^2 = \frac{1}{2}A(q)\cdot \dot q^2$$

Выражение $A(q)$ раскладывают в положении уст. равновесия:

$$A(q) = A(0) + \underbrace{\left(\frac{\partial A}{\partial q}\right)_0 \cdot q + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial q^2}\right)_0 \cdot q^2 + \ldots}_{\text{пренебрегают}}$$

т.к. иначе ур-ние (1) становится нелинейным

$A(0) = a$ – обобщ. коэф. инерции.

$$\boxed{T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2 \quad , \quad a > 0}$$

Потенц энергия д/ сис-мы с одной степенью свободы:

$\Pi = \Pi(q)$, в полож. уст. равновесия считают, что $\Pi(0) = 0$.

Д/разложения в полож. устойчивого равновесия:

$$\Pi(q) = \underset{0}{\underset{\parallel}{\Pi(0)}} + \underset{0}{\underset{\parallel}{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_0}} q + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_0 q^2 + \underbrace{\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 \Pi}{\partial q^3}\right)_0 q^3 + \ldots}_{\text{пренебрегают}}$$

т.к. в полож. уст. равновес. П - имеет экстремум

$$\Pi(q) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_0 \cdot q^2 = \frac{1}{2} C q^2 \text{ , где } C = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_0$$

2ая произв. вычисл. в полож. уст. равновесия

$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_0 = C$ - обобщ. коэф. жёсткости, $C > 0$.
(квазиупругий коэф.)

Обобщ. сила за счёт диссипативных сил:

$$Q_\Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} \text{ ; диссипатив. ф. Релея: } \Phi = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} h_k \bar{v}_k^2 \text{ , } h_k = \frac{\partial F}{\partial v_k}$$

$$\bar{v}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} \cdot \dot{q} \Rightarrow \Phi = \frac{1}{2}\underbrace{\left[\sum_{k=1}^{N} h_k \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q}\right)^2\right]}_{B(q)} \dot{q}^2 = \frac{1}{2} B(q) \cdot \dot{q}^2$$

Раскладыв. $B(q)$ в полож. уст. равновесия в ряд:
(нужно для дальнейшего вычисл. произв.)

$$B(q) = B(0) + \underbrace{\left(\frac{\partial B}{\partial q}\right)_0 q + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 B}{\partial q^2}\right)_0 q^2 + \ldots}_{\text{пренебрегают}}$$

т.к. недопустимая степень.

$B(0) = b$ - обобщ. коэффициент трения
(диссипативный коэффициент)

$\Phi = \frac{1}{2} b \dot{q}^2$.

универс. формула

$$Q(t) = \frac{\sum_k \delta A_k(t)}{\delta q}.$$

диссипативн. ф. Релея

$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2$ ; $\Pi = \frac{1}{2} c q^2$ ; $\Phi = \frac{1}{2} b \dot{q}^2$

ур-ние Лагранжа: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \cancel{\frac{\partial T}{\partial q}}^{\,0} = Q_\Pi + Q_\Phi + Q(t)$

Производная: $a\ddot{q} = -cq - b\dot{q} + Q(t) \Rightarrow$

ур-ние движения д/ сис-мы с 1ой степенью свободы.

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q(t).$$

приводим к каноническому виду:

$$\ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + \omega^2 q = \frac{1}{a} Q(t), \text{ где}$$

$2\varepsilon = \frac{b}{a}$ и $\omega^2 = \frac{c}{a}$.

Д/ $\forall$ случаев размерность : $\omega, \varepsilon \left[\frac{1}{c}\right]$.

## Свободные колебания консервативной сис-мы с 1ой степенью свободы.

Свободн. колебания происх. в отсутст. внешних сил; консерв. сис-ма – без трения :

$Q(t) = 0$ и $b = 0$ $\Rightarrow$

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0.$$

Колебания происходят за счёт нач. условий или накопленной (ранее) энергии.

$\lambda^2 + \omega^2 = 0$ — характерист. ур-ние.

$\lambda_{1,2} = \pm i\omega$;

$q = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$ — решение.

Из начальных условий:

$t = 0: \; q \underset{(1)}{=} q_0, \quad \dot q \underset{(2)}{=} \dot q_0$

$\dot q = \omega(-C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t)$

Из нач. усл. (1) $\Rightarrow$ $C_1 = q_0$

(2) $\Rightarrow$ $C_2 = \dot q_0 / \omega$.

Решение: $q = q_0 \cos\omega t + \frac{\dot q_0}{\omega} \sin\omega t$;

представим $\rightarrow q = A\sin(\omega t + \alpha) = A \sin\omega t \cos\alpha + A\cos\omega t \cdot \sin\alpha$.

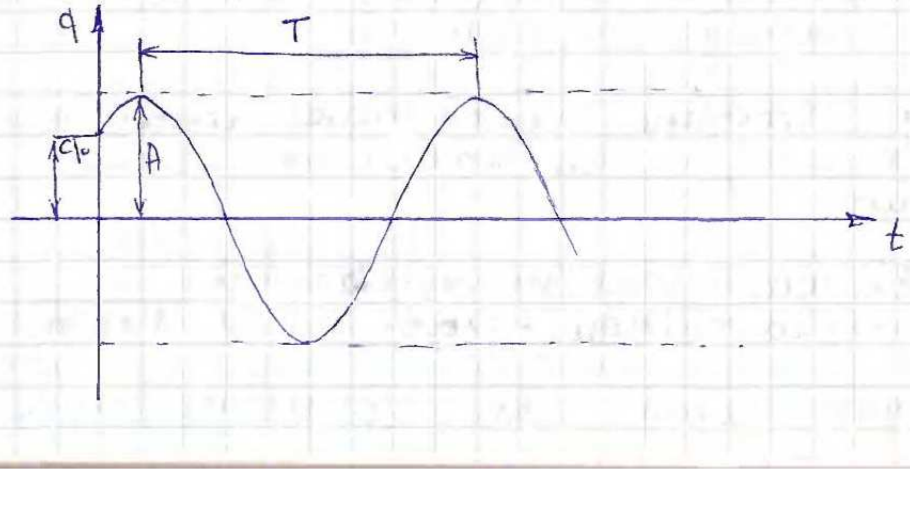
$$\left.\begin{array}{l} C_1 = A\sin\alpha \\ C_2 = A\cos\alpha \end{array}\right\} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{C_1}{C_2} = \frac{q_0\omega}{\dot q_0};$$

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot q_0^2}{\omega^2}} \Rightarrow$$

$$q = \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot q_0^2}{\omega^2}} \cdot \sin\left(\omega t + \operatorname{arctg}\frac{q_0\omega}{\dot q_0}\right) -$$

амплитудная форма записи. $\Rightarrow$

Построим график



Амплитуда – max отклонение от положения устойчивого равновесия.

2. Амплитуда = размах.

A – амплитуда колебаний;
$(\omega t + \alpha)$ – фаза колебаний
$\alpha$ – начальная фаза $\Big\} \Rightarrow \omega \left[\frac{рад}{с}\right]$

$\omega$ – круговая / циклическая частота

T – период

$\omega(t+T)+\alpha = \omega t + \alpha + 2\pi \Rightarrow \omega T = 2\pi \Rightarrow$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$;

$\nu = \frac{1}{T}$ – частота колебаний $\left[\frac{1}{c} = 1\,Гц\right]$
(число колебаний в 1 сек)

$n\left[\frac{оборотов}{сек}\right]$

$[\omega]\ \frac{рад}{с}$ ; $\Rightarrow \frac{обор}{с} = \frac{2\pi\,рад}{с}$

$n\left[\frac{об}{мин}\right]$ ; $\omega\left[\frac{рад}{с}\right] = \frac{\pi n\left[\frac{об}{мин}\right]}{30}$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ ; $\frac{1}{T} = \nu \Rightarrow \omega = 2\pi\nu$ – число колебаний в $2\pi$ сек.

Гармонические – колебания, которые происходят по закону sin или cos.

Поэтому свободные колебания консервативной сист. сис-мы с 1ой степенью свободы – гармония.

Св-ва свободн. колебаний
консервативной систе-мы с 1 степ. свободы

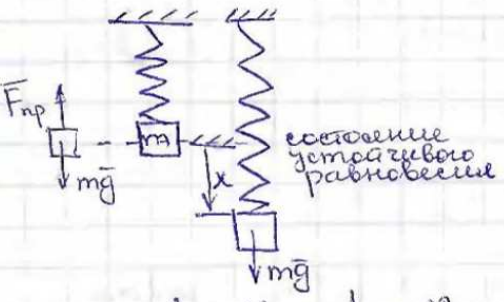
1°. Свободные колеб. явл. гармоническими

2°. Амплитуда колебаний зависит от нач. условий, а также от жёсткостных и инерцион. хар-к сис-мы.

3°. Круговая частота ($\omega$), частота ($\nu$) и период колебаний ($T$) не зависят от нач. условий, а зависят только от жёскост. и инерционных хар-их сис-мы, поэтому их назыв. собственными хар-ками сис-мы.

Независимость частоты и периода от нач. условий — изохронность колебаний.

Пример.




$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} a \dot{x}^2 \Rightarrow a = m > 0$ (соотв. теории)

$$\Pi = -mgx + \frac{C_п}{2} (\lambda^2 - \lambda_0^2)$$

$C_п$ ← коэф. жёст.

$\lambda_0$ – деформ. положения в полож. равновесия

в полож. равновесия: $mg = C_п \lambda_0 \Rightarrow \lambda_0 = \frac{mg}{C_п}$

д/ нынешнего состояния: $\lambda = \lambda_0 + x$

$$\Pi = -mgx + \frac{C_п}{2}(2\lambda_0 x + x^2) = -\cancel{mgx} + \cancel{C_п \cdot \frac{mg}{C_п} x} + \frac{1}{2} C_п x^2$$

$$\Pi = \frac{1}{2} C_п x^2 = \frac{1}{2} c x^2 \Rightarrow C_п = c$$

Ур-ние движения (формально):

$$a\ddot{x} + cx = 0 \Leftrightarrow$$

$$m\ddot{x} + C_n x = 0$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \Rightarrow$$

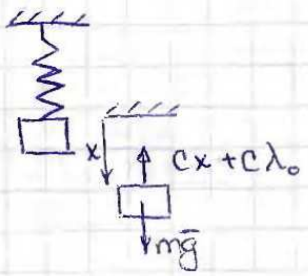
$$\omega^2 = \frac{C_n}{m}; \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C_n}}$$

$x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$ ; $t = 0$ : $x = x_0$ и $\dot{x} = 0$

$C_1 = x_0$ ; $C_2 = 0$ $\Rightarrow$ закон движения:

$$x = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{C_n}{m}} \cdot t\right)$$

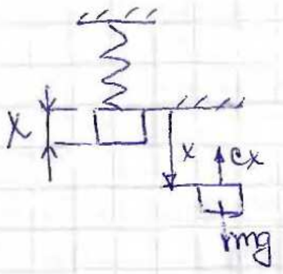
## Свободные движ. линейной неконсервативной сис-мы с одной степенью свободы.




$$\lambda_0 = \frac{mg}{c};$$

$$m\ddot{x} = mg - cx - c\lambda_0$$

$$m\ddot{x} + cx = 0$$




Если не от полож. уст. равн. ведётся отсчёт:

$$m\ddot{x} = mg - cx$$

$$x = X^{=const} + y$$

$$m\ddot{y} = \underbrace{mg - cX}_{=0} - cy$$

$$X = \frac{mg}{c}.$$

$$\boxed{\ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + \omega^2 q = 0}$$

Найдём корни

$\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + \omega^2 = 0$ - характеристическое уравнение

$$\lambda_{1,2} = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - \omega^2}$$

виды решений

1) если $\varepsilon < \omega$; $\omega_1^2 = \omega^2 - \varepsilon^2$

$\lambda_{1,2} = -\varepsilon \pm i\omega_1$ — случай малого сопротивления.

(случай затухающих колебаний).

2) $\varepsilon = \omega$;

случай критического сопротивления

3) $\varepsilon > \omega$; 2 отрицат. корня — случай большого сопротивления.

20.11.08

Решение: (повторение)

1) $\varepsilon < \omega$;

$\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + \omega^2 = 0$;

$$\lambda_{1,2} = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - \omega^2} = -\varepsilon \pm i\omega_1,$$

$$\omega_1^2 = \omega^2 - \varepsilon^2$$

$$q = e^{-\varepsilon t}\left(C_1 \cdot \cos\omega_1 t + C_2 \sin\omega_1 t\right) \qquad (*)$$

из нач. условий: $t=0$ : $\underset{(1)}{q = q_0}$ ; $\underset{(2)}{\dot q = \dot q_0}$

$q = Ae^{-\varepsilon t} \cdot \sin(\omega_1 t + \alpha)$ — амплитудная форма записи.

$$\dot q = -\varepsilon e^{-\varepsilon t}\left(C_1 \cos\omega_1 t + C_2 \sin\omega_1 t\right) +$$

$$+ \omega_1 e^{-\varepsilon t}\left(-C_1 \sin\omega_1 t + C_2 \cos\omega_1 t\right);$$

$(1) \Rightarrow C_1 = q_0,$

$(2) \Rightarrow \dot q_0 = -C_1\varepsilon + \omega_1 C_2$ ; $C_2 = \dfrac{\dot q_0 + \varepsilon q_0}{\omega_1}$

Из амплитудн. формы зап:

$q = Ae^{-\varepsilon t}\left(\sin\omega_1 t \cdot \cos\alpha + \cos\omega_1 t \cdot \sin\alpha\right)$

сравнивая с $(*)$ $\Rightarrow$

$$C_1 = A\sin\alpha$$
$$C_2 = A\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad tg\alpha = \frac{C_1}{C_2} = \frac{q_0 \cdot \omega_1}{\dot{q}_0 + \varepsilon q_0}$$

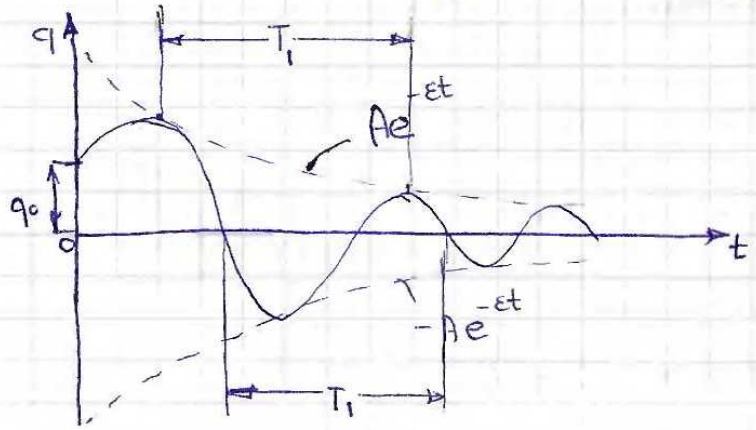
$$A = \sqrt{q_0^2 + \frac{(\dot{q}_0 + \varepsilon q_0)^2}{\omega_1^2}}$$

форма записи:

$$q = e^{-\varepsilon t}\left(q_0 \cos\omega_1 t + \frac{\dot{q}_0 + \varepsilon q_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) =$$
$$= \sqrt{q_0^2 + \frac{(\dot{q}_0 + \varepsilon q_0)^2}{\omega_1^2}} \cdot e^{-\varepsilon t} \cdot \sin\left(\omega_1 t + \operatorname{arctg}\frac{q_0\omega_1}{\dot{q}_0 + \varepsilon q_0}\right)$$

амплитуды.

График (амплитуды. форма записи)




Затухающие колебания

$T_1$ – условный период колебаний.

$Ae^{-\varepsilon t}$ – условная амплитуда колебаний

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon}{\omega}\right)^2}} = \frac{T}{\sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon}{\omega}\right)^2}}$$

$T_1 > T$, т.к. $\varepsilon < \omega$.

## Характеристики затухающих колебаний.

1) $\tau_0$ – постоянная времени; $\tau_0 = \frac{1}{\varepsilon}$
время, за которое условная амплитуда колебаний уменьшается в $e$ раз. $(e \approx 2,7)$

$A_i = Ae^{-\varepsilon t_i}$ ; $A_{i+1} = Ae^{-\varepsilon(t_i+\tau_0)}$

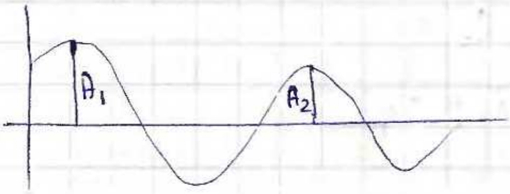
$$\frac{A_i}{A_{i+1}} = \frac{Ae^{-\varepsilon t_i}}{Ae^{-\varepsilon(t_i+\tau_0)}} = e^{\varepsilon\tau_0} = e^{\varepsilon\cdot\frac{1}{\varepsilon}} = e$$

2. $\Delta$ – декремент колебаний
отношение 2х последов. амплитуд, взятых через условный период колебаний.

$$\Delta = \frac{Ae^{-\varepsilon t_i}}{Ae^{-\varepsilon(t_i+T_1)}} = e^{\varepsilon T_1}$$

3. $\delta$ – логарифмический декремент колебаний.

$$\delta = \ln\Delta = \varepsilon T_1$$




$$\delta \approx \frac{A_1 - A_2}{A_1}$$

логариф. декремент. колеб характеризует относит. изменение амплитуды колебаний за условный период

4. $\mathcal{D}$ – добротность системы
кол-во полных колебаний, по прошествии котор. условная амплитуда колебаний уменьшается $\approx$ в $e^{\pi}$ раз. ( $e^{\pi} \approx 23,14\ldots$)

$$\mathcal{D} = \frac{\omega}{2\varepsilon}$$

$$\mathcal{D} = \frac{Ae^{-\varepsilon t_1}}{Ae^{-\varepsilon(t_1+\mathcal{D}T_1)}} = e^{\varepsilon \mathcal{D} T_1} = e^{\varepsilon\cdot\frac{\omega}{2\varepsilon}\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2-\varepsilon^2}}} =$$

$$= e^{\frac{\pi}{\sqrt{1-(\frac{\varepsilon}{\omega})^2}}} \approx e^{\pi}$$

$$\delta = \varepsilon T_1 = \varepsilon \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right)^2 - 1}} = \frac{\pi}{\sqrt{\underbrace{\left(\frac{\omega}{2\varepsilon}\right)^2}_{D} - \frac{1}{4}}} \quad \left(D >> \frac{1}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\delta \cdot D \approx \pi$$

(приближённое определение)

2) $\varepsilon = \omega$ – случай критического сопротивления.

$\lambda_{1,2} = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - \omega^2} = -\varepsilon$. – кратные корни

$$q = e^{-\varepsilon t}(C_1 + C_2 t)$$

при $t=0$ $q = q_0$ и $\dot q = \dot q_0$

$C_1 = q_0$ ;

$$\dot q = -\varepsilon e^{-\varepsilon t}(C_1 + C_2 t) + C_2 e^{-\varepsilon t}$$

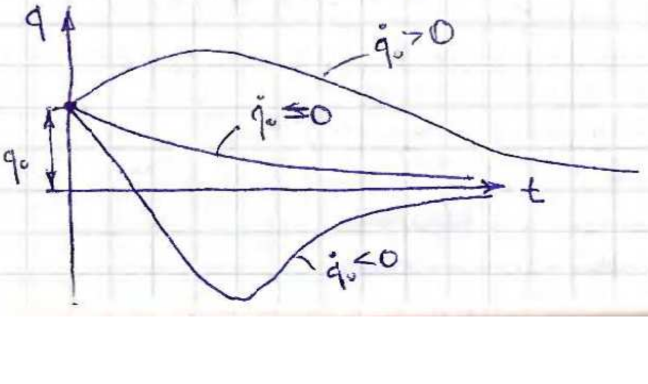
$\dot q_0 = -C_1 \varepsilon + C_2$ ; $C_2 = \dot q_0 + \varepsilon q_0$.

График функции:

$$\lim_{t\to\infty} q(t) = \lim_{t\to\infty} e^{-\varepsilon t}(C_1 + C_2 t) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \underbrace{\frac{C_1}{e^{\varepsilon t}}}_{\to 0} + C_2 \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{\varepsilon t}} = \text{по правилу Б.-Лопиталя}$$

$$= C_2 \lim \frac{1}{\varepsilon e^{\varepsilon t}} \to 0$$




Апериодическое движение

3) $\varepsilon > \omega$ – случай большого сопротивления

$$\lambda_{1,2} = -\varepsilon \pm \underbrace{\sqrt{\varepsilon^2 - \omega^2}}_{k_1^2 > 0}, \quad \lambda_1 = -\varepsilon + k_1, \quad k_1 < \varepsilon$$
$$\lambda_2 = -\varepsilon - k_1.$$

$$q(t) = e^{-\varepsilon t}\left(C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{-k_1 t}\right)$$

$$\lim_{t\to\infty} q(t) = C_1 \lim_{t\to\infty} \frac{e^{k_1 t}}{e^{\varepsilon t}} + C_2 \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^{(\varepsilon + k_1)t}} \to 0$$

(т. к. $k_1 < \varepsilon$, то: $\to 0$)

Графики имеют вид как на предыдущем рисунке.

Пример. мех. сис-ма имеет 1 степ. свободы.

$$30\ddot{q} + \dot{q} + 120q = 0.$$

канонич. форма записи: $\ddot{q} + 2\frac{1}{60}\dot{q} + 2^2 q = 0.$

в общем виде: $\ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + \omega^2 q = 0 \Rightarrow$

$$\varepsilon = \frac{1}{60}; \quad \omega = 2. \quad \Rightarrow \quad \varepsilon < \omega \Rightarrow$$

случай затухающих колебаний.

круговая (циклическая) собств. частота: $\omega = 2 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$,

собственный период колебаний: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$ с.
(без учёта сопротивл.)

условная частота колебаний: $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2} = \sqrt{4 - \frac{1}{3600}}$.

условный период колебаний: $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{4 - \frac{1}{3600}}} \approx \pi$ с

Характеристики затухания:

$$\delta = \varepsilon T_1 = \frac{1}{60\,c}\,\pi c \approx 0{,}05. = \frac{H_1 - H_2}{A_1}$$

$$\tau_0 = \frac{1}{\varepsilon} = 60\,c$$ (через 60 с. колеб. амплитуда уменьшится в е раз)

$$D = \frac{\omega}{2\varepsilon} = \frac{2\cdot 60}{2\cdot 1} = 60$$ (через 60 полных периодов амплитуда уменьшится в $e^{\pi}$ раз.)

## Вынужденные колебания систем с одной степенью свободы.

по ур-нию Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q_q = \underbrace{Q_\Pi}_{\text{потенц.}} + \underbrace{Q_D}_{\text{дис-сипат. сил}} + \underbrace{Q(t)}_{\text{сил, завис. явно от } t}$$

$$Q_\Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} = -cq;$$

$$Q_D = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot q} = -b\dot q;$$ ($\Phi$ ← диссипат. ф. Релея)

$$Q(t) = \frac{\sum \delta A(t)_q}{\delta q}\ ; \quad T = \frac{1}{2}a\dot q^2 \Rightarrow$$

$$a\ddot q + b\dot q + cq = Q(t) \iff$$

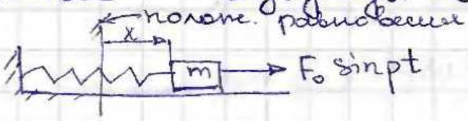
$$\underline{\ddot q + 2\varepsilon\dot q + \omega^2 q} = \frac{Q(t)}{a} = \underline{f_0 \sin(pt + \beta)}$$

если возмущающая сила - гармоническая. ⇒

решение: $q = \underbrace{q_{o.o}}_{\text{собственные колебания}} + \underbrace{q_{r.н.}}_{\text{вынужд. колебания (за счёт правой части)}}$

## Способы задания вынужденных колебаний:

1) Силовое возбуждение.

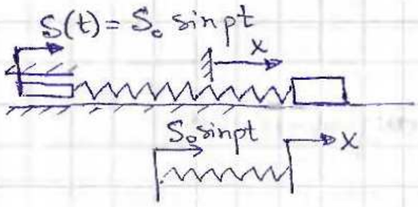


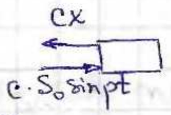

;

$$m\ddot{x} = F_0 \sin pt - cx$$

$$\underline{m\ddot{x} + cx = F_0 \sin pt}.$$

2) Кинематическое возбуждение.




$$m\ddot{x} = -cx + cS_0 \sin pt$$

$$\underline{m\ddot{x} + cx = cS_0 \sin pt}.$$

Вынужденные колебания в консервативной системе (без трения)

$$\ddot{q} + \omega^2 q = f_0 \sin(\underbrace{pt+\beta}_{\gamma_1}) \rightarrow \text{фаза возмущающей силы}$$

$$q_{ч.н} = A \cdot \sin(pt+\beta), \quad \omega \neq p$$

(предположение, точнее будем искать $q$ в этом виде)

$$-p^2 A \sin(pt+\beta) + \omega^2 A (pt+\beta) = f_0 \sin(pt+\beta)$$

$$A(\omega^2 - p^2) = f_0 \Rightarrow A = \frac{f_0}{\omega^2 - p^2}.$$

$$q_{ч.н} = \frac{f_0}{\omega^2 - p^2} \cdot \sin(pt+\beta), \quad \omega \neq p$$ т.е. отсутствует резонанс.

$$q(t) = \underbrace{C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t}_{\text{собственные колебания (о.о.)}} + \underbrace{\frac{f_0}{\omega^2 - p^2} \sin(pt+\beta)}_{\text{(ч.н.) вынужденные колебания}}$$

при $t = 0$: $q = q_0$ (1) ; $\dot{q} = \dot{q}_0$ (2)

$$(1) \Rightarrow \quad q_0 = C_1 + \frac{f_0}{\omega^2 - p^2} \sin\beta$$

$$(2) \Rightarrow \quad \dot{q}_0 = \omega C_2 + \frac{f_0 p}{\omega^2 - p^2} \cos\beta$$

$$C_1 = q_0 - \frac{f_0}{\omega^2 - p^2} \sin\beta; \quad C_2 = \frac{1}{\omega}\left(\dot{q}_0 - \frac{f_0 p}{\omega^2 - p^2} \cos\beta\right)$$

В сис-ме
Свободные колебания могут возникнуть и при нулевых нач. условиях (из-за вынуждающей сил).

$$\frac{f_0}{|\omega^2 - p^2|} = A$$ – амплитуда вынужденных колебаний.

если $p < \omega$: $\quad q_{г.н} = A \sin \underbrace{(pt + \beta)}_{\gamma_2 \text{ фаза вынужденных колебаний}}$

Разность фаз: $\gamma_1 - \gamma_2 = 0$.
(сдвиг)
Сдвиг фаз $= 0$: вынужд. колебания и возмущ. сила одновременно проходят min и max.

если $p > \omega$: $\quad q_{г.н.} = -A \sin(pt + \beta) = A \sin(\underbrace{pt + \beta - \pi}_{\gamma_2})$

$$\gamma_1 - \gamma_2 = pt + \beta - (pt + \beta - \pi) = \pi.$$

если $p > \omega$, то сдвиг фаз м/д вынужд. колеб. и возмущ. силой $= \pi$ –
двигаются в противофазе:
когда у колеб – max, у силы – min.

Если $\omega = p$: резонанс.

$q_{ч.н} = Gt\cos\underbrace{(pt+\beta)}_{\gamma_1}$ — частное решение (в таком виде). 28.11.08.

$$\dot q_{ч.н.} = G\cos(pt+\beta) - Gtp\sin(pt+\beta)$$

$$\ddot q_{ч.н} = -pG\sin(pt+\beta) - G\{p\sin(pt+\beta) + tp^2\cos(pt+\beta)\}$$

подставим в уравнение:

$$-pG\sin(pt+\beta) - G\{p\sin(pt+\beta) + tp^2\cos(pt+\beta)\} + \omega^2 Gt\cos(pt+\beta) = f_0\sin(pt+\beta) \Leftrightarrow$$

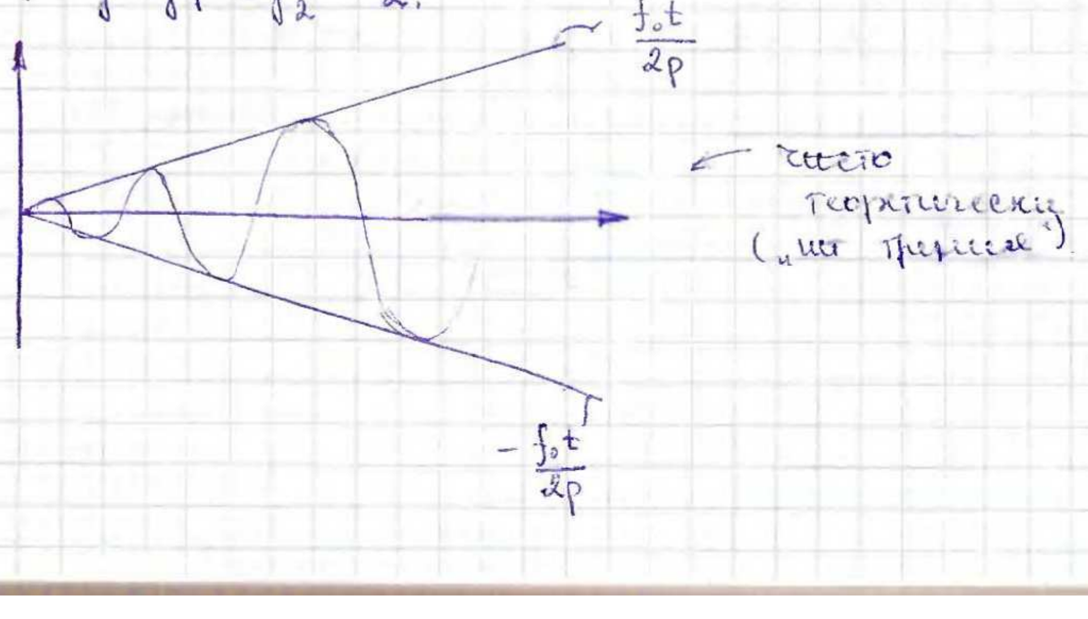
$$-2pG = f_0 \Rightarrow G = -\frac{f_0}{2p}.$$

Частное решение:

$$q_{ч.н.} = -\frac{f_0 t}{2p}\cos(pt+\beta) = \frac{f_0 t}{2p}\sin\underbrace{(pt+\beta-\tfrac{\pi}{2})}_{\gamma_2}.$$

Разность м/у фазой возмущ. и фазой колеб: сдвиг фаз при резонансе:

$$\gamma = \gamma_1 - \gamma_2 = \frac{\pi}{2}.$$



Амплитуда: $A = \dfrac{f_0}{|\omega^2 - p^2|}$, когда $\omega \neq p$

$\Rightarrow$ $A = \dfrac{f_0/\omega^2}{\left|1-\left(\frac{p}{\omega}\right)^2\right|}$; $A_0 = \dfrac{f_0}{\omega^2}$ $\Leftrightarrow$

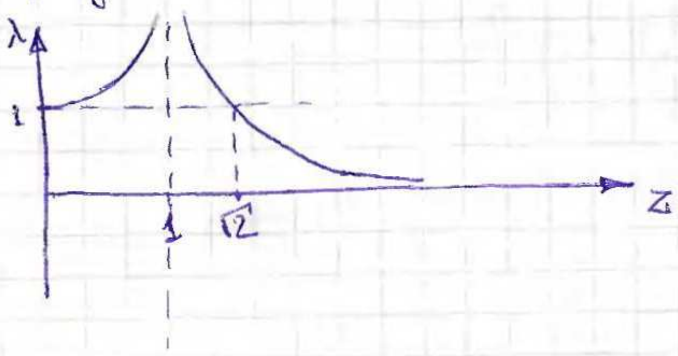
$A_0 = \lim\limits_{p\to 0} A$; $\dfrac{A}{A_0} = \lambda = \dfrac{1}{|1-z^2|}$, где $z = \dfrac{p}{\omega}$

частота возмущений

$\lambda$ – коэф. динамичности.
(амплитудно-частотная хар-ка: АЧХ).

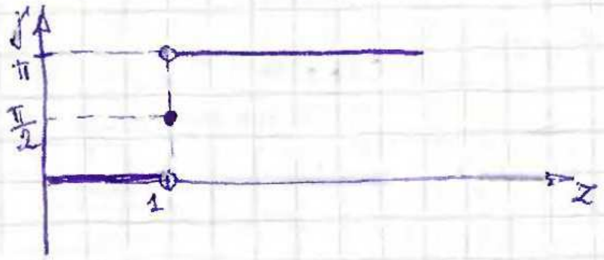
$z$ – коэф. расстройки
(относительная частота).

График $\lambda$:




амплитудно-частотная хар-ка (АЧХ).

График сдвига фаз:




фазо-частотная хар-ка (ФЧХ).

Интегрирование диф. ур-ния вынужденных колебаний при наличии линейно-вязкого сопротивления.

$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q_0 \sin(pt+\beta)$

$\ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + \omega^2 q = f_0 \sin(pt+\beta)$ (*)

$2\varepsilon = \frac{b}{a}$; $\omega^2 = \frac{c}{a}$; $\underbrace{f_0}_{\text{амплитуда вынужд. колеб.}} = \frac{Q_0}{a}$.

$q = q_{о.о} + q_{ч.н.}$

общее решение

$\ddot{q}_{о.о} + 2\varepsilon\dot{q}_{о.о} + \omega^2 q_{о.о} = 0 \Rightarrow$ 3 вида решения:

$\varepsilon < \omega$: $q_{о.о} = Ae^{-\varepsilon t}\sin(\omega_1 t + \alpha)$, $\omega_1^2 = \omega^2 - \varepsilon^2$

$\varepsilon = \omega$ : $q_{о.о} = e^{-\varepsilon t}(C_1 + C_2 t)$

$\varepsilon > \omega$: $q_{о.о} = e^{-\varepsilon t}(C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{-k_1 t})$, $k_1^2 = \varepsilon^2 - \omega^2$

частное решение: (будем искать в виде)

$q_{ч.н} = A\sin(pt + \beta - \gamma)$

$\dot{q}_{ч.н} = pA\cos(pt + \beta - \gamma')$

$\ddot{q}_{ч.н} = -p^2 A\sin(pt + \beta - \gamma')$

$\sin(pt+\beta) = \sin(pt + \beta - \gamma' + \gamma') =$

$= \sin(pt + \beta - \gamma')\cos\gamma' + \cos(pt + \beta - \gamma')\sin\gamma'$;

Подставим в ур-ние (*)

$-Ap^2\sin(pt+\beta-\gamma') + 2Ap\varepsilon\cos(pt+\beta-\gamma') +$

$+ \omega^2 A\sin(pt+\beta-\gamma') = f_0\cos\gamma'\sin(pt+\beta-\gamma') +$

$+ f_0\sin\gamma'\cos(pt+\beta-\gamma')$

По методу неопредел. коэф. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} A(\omega^2-p^2) &= f_0\cos\gamma \quad (\text{при } \sin) \\ 2Ap\varepsilon &= f_0\sin\gamma \quad (\text{при } \cos) \end{aligned}\right| \begin{aligned} &(\ldots)^2 \\ &+ \\ &(\ldots)^2 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+4\varepsilon^2p^2}};$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{2\varepsilon p}{\omega^2-p^2}.$$

$$\sin\gamma = \frac{2Ap\varepsilon}{f_0} > 0 \Rightarrow 0 \leq \gamma \leq \pi$$

сдвиг фаз

Частное неодн. решение:

$$q_{ч.н} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+4\varepsilon^2p^2}}\sin\left(pt+\beta-\operatorname{arctg}\frac{2\varepsilon p}{\omega^2-p^2}\right)$$

$$\lim_{p\to 0} A = \frac{f_0}{\omega^2} = A_0.$$

$$A_{\omega=p} = A_{рез} = \frac{f_0}{2\varepsilon p} = \frac{f_0}{2\varepsilon\omega}$$

$$\frac{A_{рез}}{A_0} = \frac{f_0\cdot\omega^2}{2\varepsilon\omega\cdot f_0} = \frac{\omega}{2\varepsilon} = Q$$ — добротность: — отношение амплитуды при резонансе к амплитуде вынужден. колеб. (точное определение).

$q_{ч.н}$ — характеризует установ. вынужд. колеб.

Св-ва вынужденных установившихся колебаний.

1°. Это незатухающие колеб., делятся до тех пор, пока действ. возмущающая сила.

2°. Они не зависят от нач. условий.

3°. При гармонич. возбужд. они происходят с частотой возмущающей силы.

4°. Колебания эти отстают по фазе от возмущ. силы на величину, изменяющ. от 0 до π.

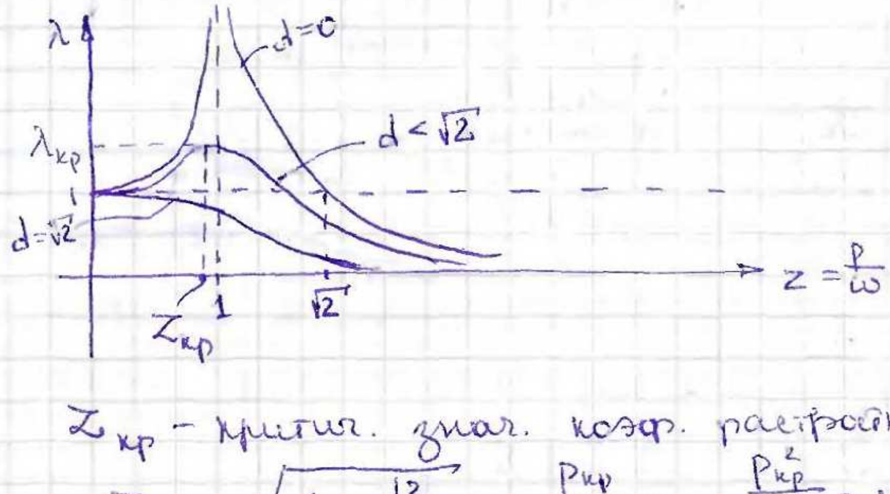
$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+4\varepsilon^2p^2}} = [\text{АЧХ}] = \frac{f_0/\omega^2}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{p}{\omega}\right)^2\right]^2+\left(\frac{2\varepsilon}{\omega}\right)^2\cdot\left(\frac{p}{\omega}\right)^2}} \ominus$$

$\frac{p}{\omega} = z; \quad \frac{2\varepsilon}{\omega} = \frac{1}{Q} = d$

$$\gamma = \operatorname{arctg}\frac{2\varepsilon p}{\omega^2-p^2} \quad -[\text{ФЧХ}.]$$

$$\ominus\ A = \frac{f_0/\omega^2}{\sqrt{(1-z^2)^2+d^2z^2}}, \quad A_0 = \frac{f_0}{\omega^2} \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{A_в}{A_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2+d^2z^2}}.$$




$z_{кр}$ − критич. знач. коэф. расстройки.

$$z_{кр} = \sqrt{1-\frac{d^2}{2}} = \frac{p_{кр}}{\omega}; \quad \frac{p_{кр}^2}{\omega^2} = 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{4\varepsilon^2}{\omega^2}$$

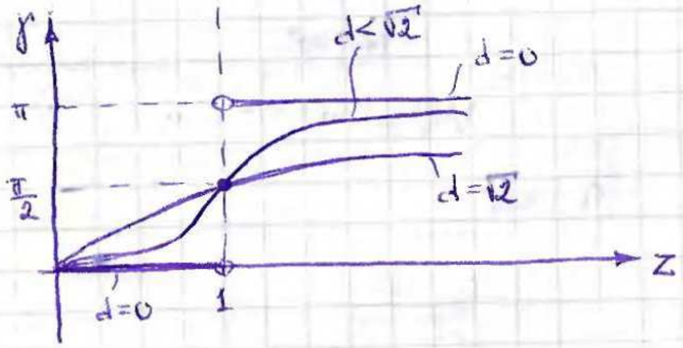
$\boxed{p_{кр}^2 = \omega^2 - 2\varepsilon^2}$; − частота, при которой $z_{кр}$.

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{1}{d \cdot \sqrt{1 - d^2/4}}$$

ФЧХ:

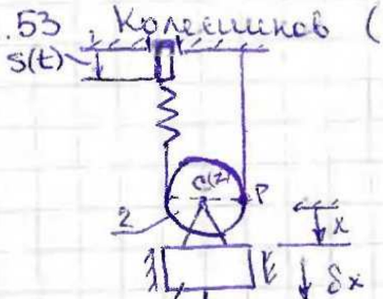
$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{2\varepsilon p}{\omega^2 - p^2} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{2\varepsilon}{\omega} \cdot \frac{p}{\omega}}{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2} =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{d \cdot z}{1 - z^2}$$




Пример.

14.53. Колесников (89).




$m_1 = 6$ кг

$m_2 = 4$ кг (одиор. диск)

$c = 4{,}8$ кН/м

$\mu = 0{,}48$ кН·с/м

$S = S_0 \sin pt$, $S_0 = 0{,}004$ м

$p = \omega$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x$$

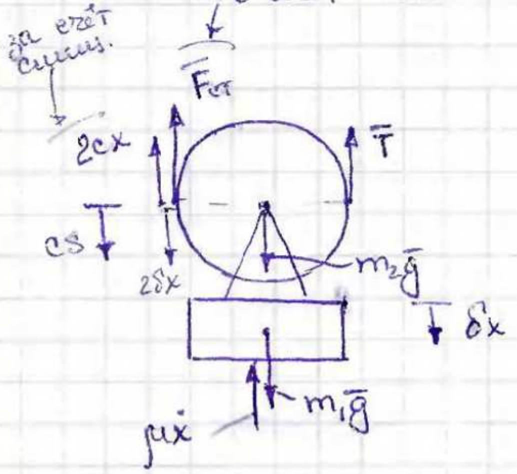
$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_c^2 + \frac{1}{2} J_{cz} \cdot \omega_2^2$$

$$v_c = \dot{x}\ ; \quad \omega_2 = \frac{\dot{x}}{r}\ ; \quad J_{cz} = \frac{1}{2} m_2 r^2$$

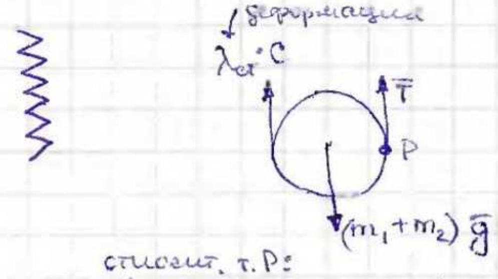
$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_2 r^2 \cdot \left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\dot{x}^2\left(m_1 + \frac{3}{2}m_2\right).$$

$$Q_x = \frac{\sum \delta A(\bar{F}_k)}{\delta x}$$




В сост. покоя (в статике)




относит. т. Р:

$$(m_1+m_2)g\cdot r - \lambda_{ст}\cdot C\cdot 2r = 0$$

$$F_{ст} = \lambda_{ст}\cdot C = \frac{1}{2}(m_1+m_2)g$$

$$\sum \delta A(\bar{F}_k) = (m_1+m_2)g\,\delta x - \mu\dot{x}\,\delta x + 2cS\cdot\delta x - (2cx + F_{ст})\cdot 2\delta x =$$

$$= \delta x\left\{(m_1+m_2)g - \mu\dot{x} + 2cS - 4cx - 2\cdot\frac{1}{2}(m_1+m_2)g\right\}$$

$$Q_x = 2cS - \mu\dot{x} - 4cx$$

Ур-ние движения:

$$\underbrace{\ddot{x}\left(m_1 + \frac{3}{2}m_2\right)}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)} = 2cS - \mu\dot{x} - 4cx. \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

приведём к канонической форме:

$$\ddot{x}\left(m_1 + \frac{3}{2}m_2\right) + \mu\dot{x} + 4cx = 2cS_0\sin pt \Rightarrow$$

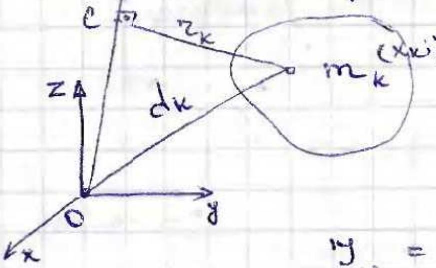
$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \omega^2 x = f_0\sin pt, \text{ где}$$

$$\omega^2 = \frac{4c}{\cancel{\ell}\, m_1 + \frac{3}{2}m_2} = \frac{4\cdot 4800\ Н^{=кг\cdot м/с^2}}{м\cdot 12\ кг} = 1600\ \frac{1}{с^2}$$

$$\omega = 40\ \frac{рад}{с}.$$

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+4\varepsilon^2 p^2}}\Bigg|_{\omega=p} = [\omega = p] = \frac{f_0}{2\varepsilon p}.$$

5.12.08. Геометрия масс.




момент инерции:

$$m_k d_k^2 = J_o$$

для тела: $J_o = \sum_k m_k d_k^2$

$$J_{oc} = \sum_{k=1}^{N} m_k r_k^2$$

ось Oc;

момент. инерции тела относит. осей:

$$J_{ox} = \sum_{k=1}^{N} m_k (y_k^2 + z_k^2)$$

$$J_{oy} = \sum_{k=1}^{N} m_k (x_k^2 + z_k^2)$$

$$J_{oz} = \sum_{k=1}^{N} m_k (x_k^2 + y_k^2)$$

Момент инерции тела относит. т. O:

$$J_o = \sum_k m_k r_k^2 = \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)$$

просуммировав $J_{ox}$, $J_{oy}$, $J_{oz}$ $\Rightarrow$

$$2J_o = J_{ox} + J_{oy} + J_{oz}$$

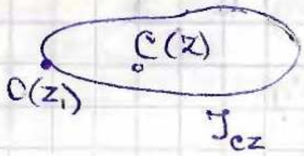
$J_o$, $J_{ox}$, $J_{oy}$, $J_{oz} > 0$.

$\sum_{k=1}^{N} m_k x_k y_k = J_{xy} = J_{yx}$ — центробежный момент инерции xy. в т. O

$\sum_{k=1}^{N} m_k y_k z_k = J_{yz} = J_{zy}$ ← могут быть положит. и отрицат.

$\sum_{k=1}^{N} m_k x_k z_k = J_{xz} = J_{zx}$

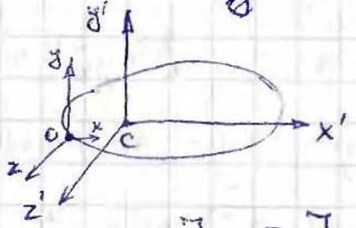
теорема Штейнера.




C – центр масс.

$$J_{Oz_1} = J_{Cz} + m(OC)^2.$$

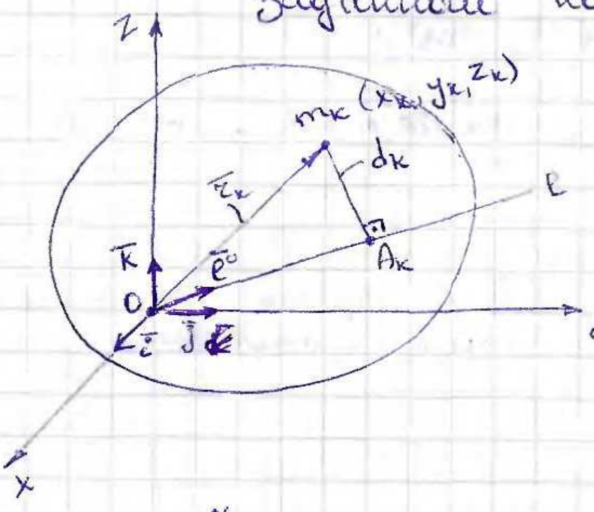
Теорема Гюйгенса-Штейнера.




$$J_{xy} = J_{x'y'} + m x_C y_C$$

вычисление центробежных моментов инерции

Моменты инерции относительно осей, проходящих через заданную точку в заданном направлении.




известны:
$J_{ox}$, $J_{oy}$, $J_{oz}$
$J_{xy}$, $J_{xz}$, $J_{yz}$
ось $\ell$:
$(O\ell, \hat{x}) = \alpha$,
$(O\ell, \hat{y}) = \beta$,
$(O\ell, \hat{z}) = \gamma$.

---

$J_\ell$ - ?

$$J_\ell = \sum_{k=1}^{N} m_k d_k^2$$

$$d_k^2 = r_k^2 - (OA_k)^2$$

$$r_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2$$

$|\bar{\ell}^\circ| = 1 \Rightarrow$

$OA_k = \bar{r}_k \cdot \bar{\ell}^\circ$

$|\bar{i}| = 1$; $|\bar{j}| = 1$; $|\bar{k}| = 1$

$$\bar{r}_k = x_k \bar{i} + y_k \bar{j} + z_k \bar{k}$$

$$\bar{l}^0 = 1 \cdot \cos\alpha\, \bar{i} + 1 \cdot \cos\beta\, \bar{j} + 1 \cdot \cos\gamma \cdot \bar{k} \Rightarrow$$

$$OA_k = x_k \cos\alpha + y_k \cos\beta + z_k \cos\gamma$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

$$d_k^2 = (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) -$$

$$- (x_k \cos\alpha + y_k \cos\beta + z_k \cos\gamma)^2 =$$

$$= (y_k^2 + z_k^2)\cos^2\alpha + (x_k^2 + z_k^2)\cos^2\beta + (x_k^2 + y_k^2)\cos^2\gamma -$$

$$- 2x_k y_k \cos\alpha\cos\beta - 2x_k z_k \cos\alpha\cos\gamma - 2y_k z_k \cos\beta\cos\gamma$$

$$J_{ol} = \sum_{k=1}^{N} m_k \{ (y_k^2 + z_k^2)\cos^2\alpha + (x_k^2 + z_k^2)\cos^2\beta +$$

$$+ (x_k^2 + y_k^2)\cos^2\gamma - 2x_k y_k \cos\alpha\cos\beta - 2x_k z_k \cos\alpha\cos\gamma -$$

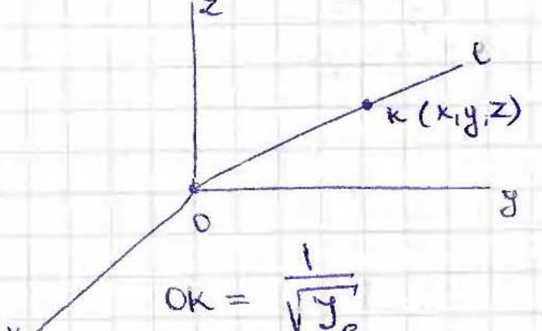
$$- 2y_k z_k \cos\beta\cos\gamma \} =$$

$$= J_{ox}\cos^2\alpha + J_{oy}\cos^2\beta + J_{oz}\cos^2\gamma -$$

$$- 2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2J_{xz}\cos\alpha\cos\gamma - 2J_{yz}\cos\beta\cos\gamma.$$

## Эллипсоид инерции

Для хар-ки распреде-ления инерции.




$OK = \dfrac{1}{\sqrt{J_e}}$

специально выбираем т.о.

$x = OK \cos\alpha$

$y = OK \cos\beta \Rightarrow$

$z = OK \cos\gamma$

$\cos\alpha = \dfrac{x}{OK} = x\sqrt{J_e}$

$\cos\beta = y\sqrt{J_e}$

$\cos\gamma = z\sqrt{J_e}$

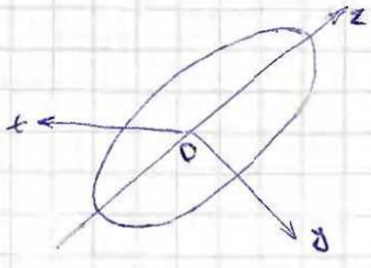
$$J_\ell = J_x\cos^2\alpha + J_y\cos^2\beta + J_z\cos^2\gamma - 2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta -$$
$$-2J_{xz}\cos\alpha\cos\gamma - 2J_{yz}\cos\beta\cos\gamma =$$
$$= J_x\cdot x^2 J_\ell + J_y\cdot y^2 J_\ell + J_z\cdot z^2 J_\ell - 2J_{xy}\cdot xy J_\ell -$$
$$- 2J_{xz}\cdot xz J_\ell - 2J_{yz}\cdot yz J_\ell \Rightarrow$$

Ур-ние эллипсоида:

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy}xy - 2J_{xz}xz - 2J_{yz}yz = 1.$$

Эллипсоид инерции (начало отсчёта — т. O)
в т. O.

Если в качестве т. O — центр масс, то это центральный эллипсоид инерции.




Оси эллипсоида инерции — главные оси инерции в т. O

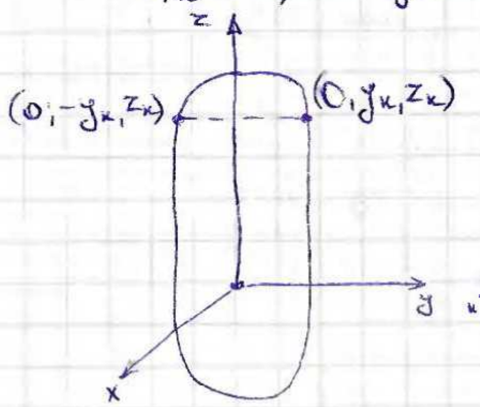
Если т. O совпадает с ц. м. — то это главные центральные оси инерции

Моменты инерции относит. глав. осей — главные моменты инерции;
относит. главн. центральных осей — главные центральные моменты инерции.

## Св-ва главных осей инерции

1°. Если одна из декартовых осей координат (Oz) явл. главн. осью инерции т. O, а 2 другие оси (Ox и Oy) — $\forall$, то 2 центробежных момента инерции, содержащих в своём наименовании индекс этой оси (Oz), = 0.

$J_{xz} = 0$; $\quad J_{yz} = 0.$




$$J_x \cdot x^2 + J_y y^2 + J_z \cdot z^2 - 2J_{xy}\,xy - 2J_{xz}\,xz - 2J_{yz}\,yz = 1$$

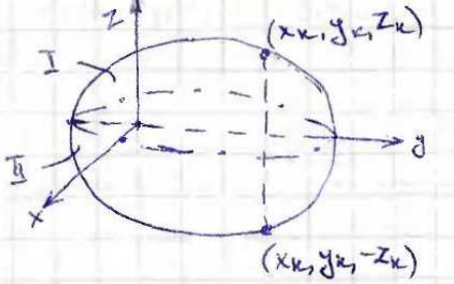
$$J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{yz}\cdot yz = 1$$

$$J_y(-y)^2 + J_z z^2 - 2J_{yz}(-y)z = 1$$

$$-4J_{yz}\cdot yz = 0 \Rightarrow \boxed{J_{yz} = 0}$$

аналогично $J_{xz} = 0$

2°. Если однородное тело имеет пл-ть симм, то д/∀ т, лежащей в этой пл-ти одна из главн. осей инерции, ⊥-на пл-ти симм., а 2 другие главные оси инерции расположены в этой пл-ти.




$$J_{xz} = \sum_{I} m_k x_k z_k + \sum_{II} m_k x_k(-z_k) = 0$$

$$J_{yz} = \sum_{I} m_k y_k z_k + \sum_{II} m_k x_k(-z_k) = 0.$$

3°. Если однородное тело имеет ось симметр. или неоднородн. тело имеет ось материал. симм., то эта ось — ~~ось~~ главная центр. ось ~~симметр~~ инерции.

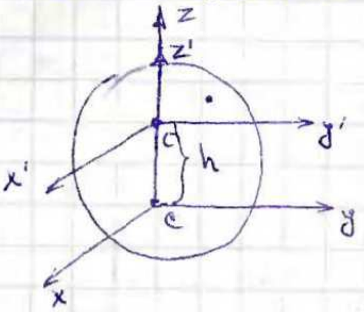
Oz — ось симметр.

$(x_k, y_k, z_k) \Rightarrow$ симметр. т; $(-x_k, -y_k, z_k)$

$$J_{xz} = \sum_{I} m_k x_k z_k + \sum_{II} m_k (-x_k) z_k = 0$$

$$J_{yz} = \sum_{I} m_k y_k z_k + \sum_{II} m_k (-y_k) z_k = 0.$$

4°. Главные оси инерции д/ т. O, расположенной на главн. центральной оси инерции, ||-ны главным центральным осям инерции




д/ ∀ точки: $y' = y$
$x' = x$
$z' = z - h$

$$J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$$

$$J_{x'y'} = \sum m_k x' y' = \sum m_k x_k y_k = J_{xy} = 0$$

$$J_{x'z'} = \sum m_k x' z' = \sum_k m_k x_k (z_k - h) = \underbrace{\sum m_k x_k z_k}_{J_{xz} = 0} - \left(\sum m_k x_k\right) h$$

$$\underbrace{\frac{\left(\sum m_k x_k\right) h}{\sum m_k}}_{0} \cdot \sum m_k = 0 \quad \Rightarrow \quad J_{x'z'} = 0.$$

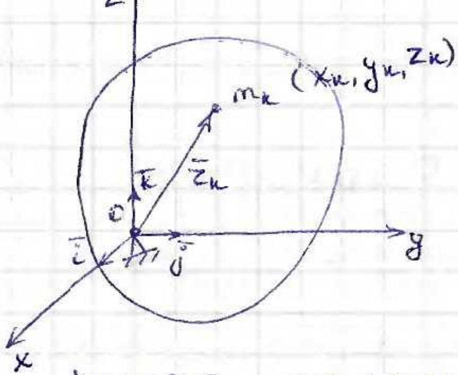
т.к. координ. ц. м.

$$J_{y'z'} = \sum m_k y' z' = \sum m_k y_k (z_k - h) =$$

$$= \underbrace{\sum m_k y_k z_k}_{J_{yz} = 0} - h \frac{\overbrace{\left(\sum m_k y_k\right)}^{0}}{\sum m_k} \cdot \sum m_k = 0$$

Следствие:
главн. центр. ось инерции – явл. главной осью инерции д/ всех своих точек.

Кинетический момент тела, имеющего 1 неподвижн. точку.




кинетич. момент относит. т.О:

$$\bar{K}_o = K_x \cdot \bar{i} + K_y \bar{j} + K_z \cdot \bar{k},$$

по определению:

$$\bar{K}_o = \sum_{k=1}^{N} (\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k) = \sum_{k=1}^{N} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_k & y_k & z_k \\ m_k v_{kx} & m_k v_{ky} & m_k v_{kz} \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i} \underbrace{\sum_{k=1}^{N} m_k (y_k v_{kz} - z_k v_{ky})}_{K_x} +$$

$$+ \bar{j} \underbrace{\sum_{k=1}^{N} m_k (z_k v_{kx} - x_k v_{kz})}_{K_y} +$$

$$+ \bar{k} \underbrace{\sum_{k=1}^{N} m_k (x_k v_{ky} - y_k v_{kx})}_{K_z}$$

По формуле Эйлера: $\bar{v}_k = \bar{\omega} \times \bar{r}_k =$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix} = \bar{i} \underbrace{(\omega_y z_k - \omega_z y_k)}_{v_{kx}} + \bar{j} \underbrace{(\omega_z x_k - \omega_x z_k)}_{v_{ky}} + \bar{k} \underbrace{(\omega_x y_k - \omega_y x_k)}_{v_{kz}}$$

$$K_x = \sum_{k=1}^{N} m_k \left[ y_k(\omega_x y_k - \omega_y x_k) - z_k(\omega_z x_k - \omega_x z_k) \right] =$$

$$= \omega_x \underbrace{\sum_k m_k (y_k^2 + z_k^2)}_{J_x} - \omega_y \underbrace{\sum_k m_k (x_k y_k)}_{J_{xy}} - \omega_z \underbrace{\sum_k m_k x_k z_k}_{J_{xz}}$$

$$\begin{cases} K_x = J_x \omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z \\ K_y = -J_{yx}\omega_x + J_y \omega_y - J_{yz}\omega_z \\ K_z = -J_{zx}\omega_x - J_{zy}\omega_y + J_z \omega_z \end{cases}$$

Для главных осей:

центробежные моменты: $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$

$K_x = J_x \omega_x$ ; $K_y = J_y \omega_y$ ; $K_z = J_z \omega_z$

Тело вращается относит. оси $Oz$:

$\omega_x = 0$ ; $\omega_y = 0$ , $\omega_z \neq 0 \Rightarrow$

$K_x = -J_{xz}\omega_z$

$K_y = -J_{yz}\omega_z$

$K_z = J_z \omega_z$

Если ось $Oz$ - ось симметрии, то

$J_{xz} = J_{yz} = 0 \Rightarrow K_z = J_z \omega_z$.

Все выведенные ф. справедливы как д/ подвижн., так и неподвижн. осей.

12.12.08.

$$K_x = J_x \omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z$$

$$K_y = -J_{yx}\omega_x + J_y\omega_y - J_{yz}\omega_z$$

$$K_z = -J_{zx}\omega_x - J_{zy}\omega_y + J_z\omega_z$$

Кинетическая энергия тела, совершающего сферическое движение:

$$T = \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\bar{v}_k^2}{2}; \quad \bar{v}_k = \bar{\omega} \times \bar{r}_k \leftarrow \text{из ф. Эйлера}$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \bar{v}_k \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_k);$$

$$\bar{v}_k (\bar{\omega} \times \bar{r}_k) = \bar{\omega} \cdot (\bar{r}_k \times \bar{v}_k) = \bar{r}_k \cdot (\bar{v}_k \times \bar{\omega})$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \cdot \bar{\omega} \cdot (\bar{r}_k \times \bar{v}_k) = \frac{1}{2}\bar{\omega} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{N}(\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k)}_{\text{кинетич. момент}} =$$

$$= \frac{1}{2}\bar{\omega} \cdot \bar{K}_0 \quad (\text{относит. т. } O)$$

$$T = \frac{1}{2}\bar{\omega}\bar{K}_0 = \frac{1}{2}|\bar{\omega}| \cdot |\bar{K}_0| \cos(\widehat{\bar{\omega}, \bar{K}_0}) \geq 0 \Rightarrow$$

$\cos(\widehat{\bar{\omega}, \bar{K}_0}) \geq 0$ – ~~угол~~ при сферич. движ.

$\angle$ м/у $\omega$ и $K_0$ – острый

$$T = \frac{1}{2}(\omega_x K_x + \omega_y K_y + \omega_z K_z) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big\{\omega_x(J_x\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z) +$$
$$+ \omega_y(-J_{yx}\omega_x + J_y\omega_y - J_{yz}\omega_z) +$$
$$+ \omega_z(-J_{zx}\omega_x - J_{zy}\omega_y + J_z\omega_z)\Big\}$$

$$T = \frac{1}{2}(J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2 - 2J_{xy}\omega_x\omega_y - 2J_{xz}\omega_x\omega_z -$$

$- 2J_{yz}\,\omega_y\omega_z)$

Д/ главных осей $J_{xy}=0, \; J_{xz}=0 \; ; \; J_{yz}=0$.

$$K_x = \frac{\partial T}{\partial \omega_x}; \quad K_y = \frac{\partial T}{\partial \omega_y}; \quad K_z = \frac{\partial T}{\partial \omega_z}.$$

Динамические уравнения Эйлера.

(ур-ние движ. тела)

теорема:

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \bar{M}_0(\bar{F}_k^{(e)}) = \bar{L}_0^{(e)} \quad (*)$$

главн. момент всех сил относит. т. О.

Взять оси, жёстко связанные с вращающ. телом, чтобы моменты инерции не зависели от времени (предложил Эйлер). (оси Oxyz).

⇓ по формуле Бура:

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \underline{\frac{\tilde{d}\bar{K}_0}{dt} + \bar{\omega}\times\bar{K}_0}$$ ← в подвижн. с.о.

$$\bar{\omega}\times\bar{K}_0 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ K_x & K_y & K_z \end{vmatrix} = \bar{i}\,(\omega_y K_z - \omega_z K_y) + \bar{j}\,(\omega_z K_x - \omega_x K_z) + \bar{k}\,(\omega_x K_y - \omega_y K_x). \Rightarrow$$

проекция (*) на подвижн. оси (Oxyz)

$$\frac{dK_x}{dt} + \omega_y K_z - \omega_z K_y = L_{0x}^{(e)}$$ проекц. на Ox

$$\frac{dK_y}{dt} + \omega_z K_x - \omega_x K_z = L_{0y}^{(e)}$$

$$\frac{dK_z}{dt} + \omega_x K_y - \omega_y K_x = L_{0z}^{(e)}$$

Выбрать оси $Oxyz$ – главные оси инерции (опять предложение Эйлера) $\Rightarrow$

$$J_{xy} = 0 \; ; \quad J_{xz} = 0 \quad и \quad J_{yz} = 0 \quad \Rightarrow$$

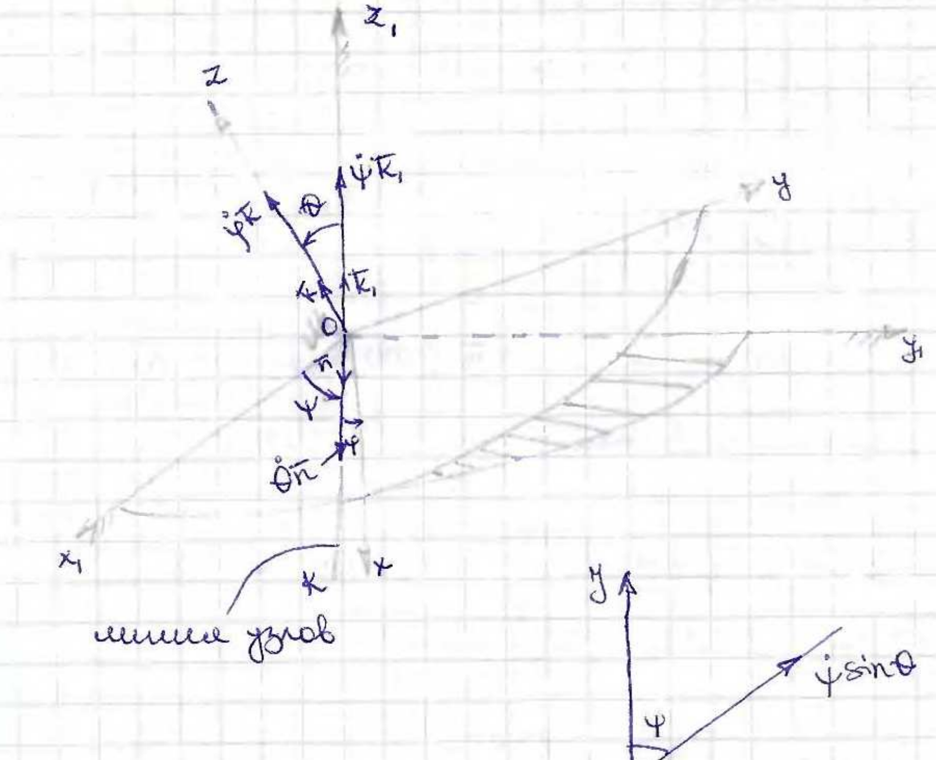
$$K_x = J_x \omega_x \; ; \quad K_y = J_y \omega_y \quad и \quad K_z = J_z \omega_z .$$

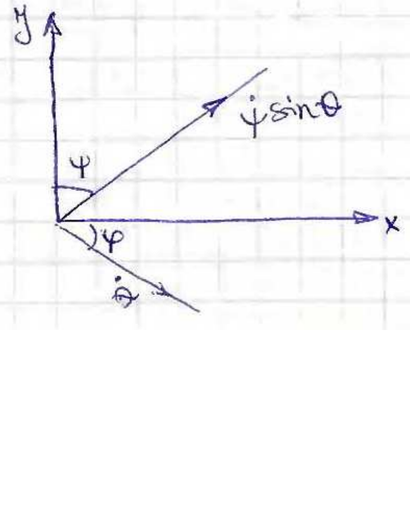
тогда в главных осях:

$$\left.\begin{aligned} J_x \frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y \omega_z (J_z - J_y) &= L_{ox}^{(e)} \\ J_y \frac{d\omega_y}{dt} + \omega_x \omega_z (J_x - J_z) &= L_{oy}^{(e)} \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} + \omega_x \omega_y (J_y - J_x) &= L_{oz}^{(e)} \end{aligned}\right\}$$

Динамические ур-ние Эйлера при сферическом движение.

Нужно знать, как зависят от $t$ углы Эйлера:
$\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\theta = \theta(t)$.



Кинематические ур-ния Эйлера:

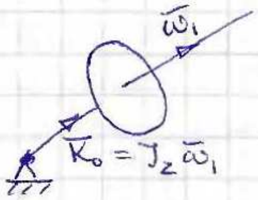
$$\omega_x = \dot\theta \cos\varphi + \dot\psi \sin\theta \sin\varphi$$

$$\omega_y = \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi$$

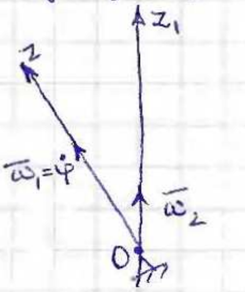
$$\omega_z = \dot\varphi + \dot\psi \sin\theta$$

Приближённая теория гироскопа

скорости вращения большие: до 50000 $\frac{об}{мин}$. $(= \omega_1)$




Вращение вокруг неподвижной точки.




$\omega_2$ – угл. с-сть прецессии,

$\omega_3$ – нутации.

$\omega_1$ – собственного вращения

На практике:

$\omega_2 << \omega_1$

$\omega_3 << \omega_1$

в приближ. теории пренебрегают $\omega_2$ и $\omega_3$ остаётся (1ое допущение)

Если в т. O д/ тела выбрать главн оси инерции, (Oxyz), то

$$J_{xy} = J_{yz} = J_{xz} = 0, \text{ а } J_x \neq 0, J_y \neq 0; J_z \neq 0.$$

$$K_0 = \sqrt{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2} = K_z \cdot \omega_z$$

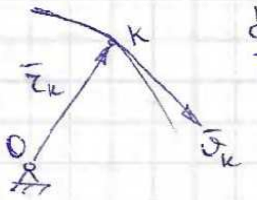
1ое допущение в теории гироскопа.

2ое допущение: $\bar K_0 \doteq J_z \cdot \bar\omega_z$

($\doteq$ – приближённо)

Теорема Резаля.

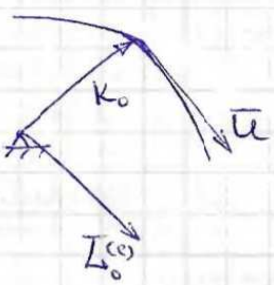
$$\frac{d\bar K_0}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \bar M_0 (\bar F_k^{(e)}) = \bar U$$




$$\frac{d\bar{r}_k}{dt} = \bar{v}_k$$

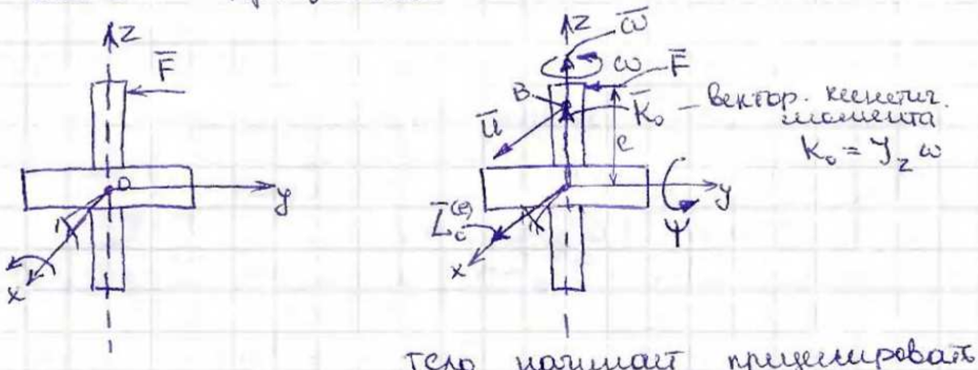
Теорема

При движ. механ. сис-мы скорость т., совпадающей с концом вектора кинетич. момента = по величине и ||-на по направл. главному моменту всех внешних сил системы.




$$L^{(e)} \parallel \bar{u}$$

Правило прецессии




тело начинает прецессировать (поворач. относит. оси y)
ось собственного вращения гироскопа не обладает инерцией

$$\text{Угол поворота: } \psi = \frac{\overbrace{u \cdot \tau}^{\leftarrow\text{(длина дуги)}}}{K_o} = [u = F \cdot l \text{ по теор. Резаля}] =$$

$$= \frac{F l \tau}{J_z \omega} = \frac{(F\tau) \cdot l}{J_z \cdot \omega}.$$

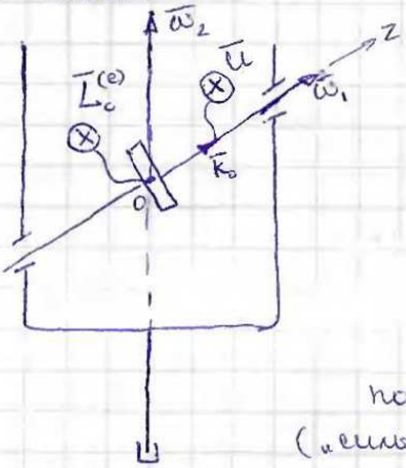
импульс силы F

Быстро вращающийся гироскоп не воспринимает ударов (кратковременных воздействий).

Правило прецессии:
- если к вращающемуся вокруг собственной оси гироскопу приложить внешние силы, то та часть гироскопа, по котор. направлен кинетич. момент начнёт поворачиваться (прецессировать) в направлении векторного момента этих внешних сил.

## Гироскопический момент.

Рассмотрим случай, когда движ. оси гироскопа задано и требуется определить возникающие при этом силы.




т.О – неподвижн. точка

$$\bar K_o = J_z \bar\omega_1$$

из кинематики

$$\bar L_o^{(e)} = \frac{d\bar K_o}{dt} = \bar\omega_2 \times \bar K_o = \bar\omega_2 \times (J_z \cdot \bar\omega_1) =$$

$$= -J_z(\bar\omega_1 \times \bar\omega_2)$$

по III аксиоме динамики («силы действия – противодействия равны»):

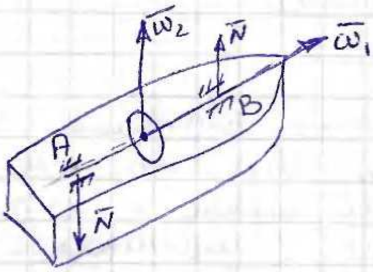
$$\bar L_o^{(e)} = -\bar L_г$$ ← гироскопический момент

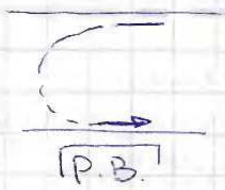
$$\bar L_г = J_z(\bar\omega_1 \times \bar\omega_2)$$

Правило Грюэ – Жуковского:

При сообщении оси гироскопа принудит. прецессии, ось гироскопа стремится кратчайшим путём установиться ||-но оси принудит. прецессии т.О, чтоб направление векторов $\bar\omega_1$ и $\bar\omega_2$ совпадали.

Пример:




(N-пара сил гироскоп. момента ?)

$$L_2 = N \cdot l = J_2\, \omega_1 \omega_2 \sin(\bar\omega_1, \hat{\bar\omega}_2) \Rightarrow$$

$$N = \frac{J_2\, \omega_1 \omega_2}{l}.$$

В статике:


потом добавляются силы

19.12.08. Динамика точки переменной массы

1897г. - ур-ние Мещерского.
1928г. - Леви - Чивита.

Диф. ур. движения точки переменной массы.

Справедлив принцип независимости действия сил

$$d\bar v = d\bar v_1 + d\bar v_2 \Rightarrow$$

$d\bar v_1$ — если $m=const$, а действует только $F$

$d\bar v_2$ — если $F = \cancel{const}\ 0$, а $m$ - меняется

$$m\frac{d\bar v_1}{dt} = \bar F \Rightarrow \boxed{d\bar v_1 = \frac{\bar F}{m}dt}$$

$$m(t+dt) = m(t) + dm$$ ← приращение массы

$m(t+dt) - m(t) = \underbrace{dm}$ → масса, которая „ушла".

$$\boxed{d'm = -dm}$$

Применение Th об изменении кол-ва движ. т постоянной m, т.к. сис-ма, состоящая из мат. т. перем. m и отделивш. частица свободна от внешних сил, то кол-во движ – const:

$$\bar{Q} = \bar{Q}(t) = \bar{Q}(t+dt)$$

при t: $\boxed{m} \to \bar{v}$ при t+dt: $\boxed{m - d'm} \to \bar{v} + d\bar{v}_2$

$\boxed{d'm} \to \bar{u}$

$\bar{v}$ и $\bar{u}$ – скорости в инерциальн. с.о. (абсолютные?)

$$m\bar{v} = (m - d'm)(\bar{v} + d\bar{v}_2) + d'm \cdot \bar{u} =$$

$$= \cancel{m\bar{v}} + m d\bar{v}_2 - d'm\bar{v} - \underbrace{d'm\, d\bar{v}_2} + d'm\bar{u}$$

величина 2ого порядка малости: ею пренебрегают.

$m d\bar{v}_2 = d'm(\bar{v} - \bar{u})$, т.к. $d'm = -dm$, то

$$d\bar{v}_2 = \frac{dm}{m}(\bar{u} - \bar{v}).$$

$$d\bar{v} = d\bar{v}_1 + d\bar{v}_2 = \frac{\bar{F}}{m}dt + \frac{dm}{m}(\bar{u} - \bar{v}), \quad \cdot \frac{m}{dt}$$

$$\boxed{m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \frac{dm}{dt}(\bar{u} - \bar{v})}$$ – уравнение Мещерского

Если с т. переменной массы связать подвижную сис-му коорд., поступат. движущуюся относит. неподв. сис-мы, тогда $v$ отделившейся частицы:

$$\bar{u} = \bar{v}_e + \bar{v}_r \;;\; \bar{v}_e = \bar{v} \;,\; \bar{u} - \bar{v} = \bar{v}_r \;,$$

тогда ур-ние Мещерского:

$$m\frac{d\bar v}{dt}=\bar F+\underbrace{\frac{dm}{dt}\cdot\bar v_r}_{\bar\Phi_r}$$

$\bar\Phi_r$ — реактивная сила.

Диф. ур. движ. т. переменной массы имеет такой же вид, как и д/т. const массы, только кроме прилож. к т. сил действует ещё и реактивн. сила, обусловлен. изменением массы точки.

## I-ая задача Циолковского.

Рассматривается прямолин. движ. т. перемен. массы под действием только 1ой реактивн. силы. Скорость истеч. $\bar v_r = const$ направлена в сторону, противоположн. движ. т.

$$m\frac{d\bar v}{dt}=\frac{dm}{dt}\bar v_r$$

$$x]\quad m\frac{dv}{dt}=\frac{dm}{dt}(-v_r)$$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v_r}=-\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m}\qquad (v_r=const)\Rightarrow$$

$\left.\begin{matrix}v_0\\ m_0\end{matrix}\right\}$ — нач. значения

$$\frac{1}{v_r}(v-v_0)=-\ln m\Big|_{m_0}^{m}=-(\ln m-\ln m_0)=$$

$$=\ln\frac{m_0}{m}\Rightarrow$$

$$\boxed{v=v_0+v_r\ln\frac{m_0}{m}}$$ формула Циолковского (1903)

Д/ ракеты:

$$m_0=m_{\substack{\text{сухой}\\ \text{ракеты (ср)}}}+m_{\substack{\text{топлива}\\ \text{(т)}}}$$

в конце горения топлива: $m=m_{ср}$

$v_1$ — скорость в конце горения;

$$\vartheta_1 = \vartheta_0 + \vartheta_г \ln\left(\frac{m_{ср}+m_т}{m_{ср}}\right) = \vartheta_0 + \vartheta_г \ln(1+Z)$$

$Z = \frac{m_т}{m_{ср}}$ – число Циолковского

$\vartheta_0$ – скорость на старте

$\vartheta_г$ – скорость истечения газов

$\vartheta_г = 2{,}5$ км/с (достигли).

(идея многоступенчатой ракеты)

Определение закона движения.

$$\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_г \ln\frac{m_0}{m} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow$$

$$\int_0^{x} dx = \int_0^t \vartheta_0 \cdot dt + \vartheta_г \int_0^t \left(\ln\frac{m_0}{m}\right) \cdot dt$$

$$x = \vartheta_0 t + \vartheta_г \int_0^t \ln\frac{m_0}{m}\,dt$$

Пусть 1) $m = m_0(1-\alpha t)$

$$\int_0^t \ln\frac{\cancel{m_0}}{\cancel{m_0}(1-\alpha t)}\,dt = -\int_0^t \ln(1-\alpha t)\,dt =$$

$$\left[\int \ln x\,dx = x(\ln x - 1)\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha}\int_0^t \ln(1-\alpha t)\,d(1-\alpha t) = \frac{1}{\alpha}\Big\{(1-\alpha t)\big[\ln(1-\alpha t)-1\big]\Big\}\Big|_0^t =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\Big\{\ln(1-\alpha t) - \alpha t\ln(1-\alpha t) - \cancel{1} + \alpha t + \cancel{1}\Big\}.$$

ур. движ: $x = \vartheta_0 t + \frac{\vartheta_г}{\alpha}\Big\{(1-\alpha t)\ln(1-\alpha t) + \alpha t\Big\}$

реактивная сила: $\Phi_г = -\frac{dm}{dt}\vartheta_г = \alpha m_0 \vartheta_г = const$

Пусть 2) $m = m_0 e^{-\alpha t}$ (предпочтительнее

$$\int_0^t \ln\frac{m_0}{m}\,dt = \int_0^t \ln\frac{\cancel{m_0}}{\cancel{m_0} e^{-\alpha t}}\,dt = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}\alpha v_r t^2.$$

Ускорение реактивное: $a_r = \frac{\Phi_r}{m} = \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}\cdot \bar v_r =$

$$= \frac{e^{\alpha t}}{m_0}(-\alpha)\, m_0 e^{-\alpha t}\cdot v_r = -\alpha v_r$$

$$a_r = \text{const}.$$

IIая задача Циолковского

Рассматривается вертик. движ. вблизи Земли в однородном поле сил тяжести ($g = \text{const}$)

$$m\frac{d\bar v}{dt} = \bar F + \frac{dm}{dt}\bar v_r$$


$$\bar F = m\bar g$$

$$x\,|\; m\frac{dv}{dt} = -mg - \frac{dm}{dt}v_r$$

$$v = v_0 - gt + v_r \ln\frac{m_0}{m}$$

при линейном законе измен. m $\left[\, x = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + \frac{v_r}{\alpha}\left\{(1-\alpha t)\ln(1-\alpha t) + \alpha t\right\}\right.$

при изменении m по exp $\left[\, x = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{2}\alpha v_r t^2.\right.$

При показательном законе ~~изтег~~ изменении массы ракеты при $v_0 = 0$ максимальная высота подъёма:

$$H_{max} = \frac{\mu^2 v_r^2}{2g}$$

$$\mu = \ln(1+z), \quad z = \frac{m_T}{m_{cp}}$$

она достигается при мгновенном сгорании топлива. мгн. сгор. влечёт за собой $\infty$-но

Большое ускорение ракеты
и => такое ускорение невыполнимо и недопуст.
При постепен. увел. ускорение будет конечным, но
неизбежен проигрыш в высоте.
Если ввести коэф. перегрузки $k$, равн.
отношению силы давл. груза в ракете на
опору, к силе притяж. груза к земле, то

$$H = \frac{k-1}{k} H_{max}$$ – формула А.А. Космодемьянского

## ВЫВОДЫ

В курсе лекций рассмотрены основные темы курса «Техническая механика» такие как: понятие скорости, как производной от пути, понятие ускорения. Как производной от ускорения по времени. Угловые скорости вращающихся тел и взаимодействие тел, имеющих поступательные и угловые скорости. Законы, описывающие системы взаимодействующих тел с двумя и более степенями свободы, законы движения пружин и взаимодействия пружин с телами, движение которых описывается линейными уравнениями.

Данный конспект лекций составлен на основе лекционного курса, читаемого в МГТУ им. Н.Э. Баумана на кафедре иу4 преподавателем Бондаренко Н. И. Курс лекций рекомендован к выполнению текущих аттестационных мероприятий и подготовки к зачету по предмету «Техническая механика».

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ


1. Бать М.И и др. Теоретическая механика в примерах и задачах. Учеб.пособ. для вузов. В 2-х т./М.И.Бать, Г.Ю.Джанелидзе, А.С. Кельзон.-9-е изд., перераб.-М.:Наука,1990.-670 с.
2. Бутенин Н.В. и др. Курс теоретической механики: Учеб.пособие для студ-ов вузов по техн.спец.:В 2-х т./Н.В.Бутенин, Я.Л.Лунц, Д.Р.Меркин. СПб.: Лань.-5-е изд., испр.-1998.-729 с.
3. Курс теоретической механики: Учебник для вузов по направлению подгот.дипломир.специалистов в области техники и технологии/ [ В.И.Дронг, В.В.Дубинин,М.М., Ильин и др.];Под ред.К.С.Колесникова.-3-е изд.,стер. М. : Изд- во МГТУ им. Н.Э.Баумана,2005.-735 с.- (Механика в техническом университете:В 8 т.;Т.1)
4. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике: Учеб. пособие для студ.вузов,обуч.по техн.спец./И.В.Мещерский; Под ред. В.А.Пальмова, Д.Д.Меркина.-45-е изд.,стер.-СПб.и др.: Лань,2006.-447 с. 2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов/С.М.Тарг.-15-е изд.,стер.-М.:Высш.шк.,2005.-415 с.